Nachrichten

von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

aus dem Jahre 1924.

Mathematisch-Physikalische Klasse.

BERLIN
Weidmannsche Buchhandlung
1925

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner) in Göttingen.

Register

über die

Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

aus dem Jahre 1924.

Mathematisch-Physikalische Klasse.

Die erdmagnetischen Störungen nach den Beobachtungen des Samoa-Observatoriums.

von

G. Angenheister.

I. Teil.

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung vom 25. Januar 1924.

Das Kraftsystem, wodurch das magnetische Feld an der Erdoberfläche hervorgerufen wird, läßt sich zerlegen in einen innerhalb der Erde und einen außerhalb gelegenen Anteil. Beide Anteile besitzen ein Potential. Das innerhalb gelegene Kraftsystem ist sehr langsam „säkular" veränderlich. Das äußere Feld ist schnell veränderlich. Das letztere läßt sich durch elektrische Stromsysteme darstellen, die ganz in der Atmosphäre verlaufen. Nach der eben vollendeten ersten magnetischen Erdvermessung der Carnegie Institution trägt das innere Feld 94 %, das äußere 6 % zum Gesamtfeld an der Oberfläche der Erde bei. Ob außer diesen beiden noch ein potentialloses Teilfeld besteht, darstellbar durch vertikale elektrische Erd-Luftströme, ist zur Zeit noch umstritten. Sein Beitrag zum Gesamtfeld würde sich auf wenige Prozent belaufen.

Die zeitliche Veränderung der Intensität des inneren Feldes beträgt pro Jahr etwa 1 ‰ seines Betrages. Das äußere Feld schwankt im Laufe eines Tages oder in noch kürzeren Zeiträumen bis zu 100 % seines Betrages. Von den Schwankungen des potentiallosen Anteiles ist uns nichts sicheres bekannt.

Die Schwankungen des äußeren Variationsfeldes bestehen zum Teil in regelmäßigen leichter überschaubaren periodischen Vorgängen, von der Periodenlänge des ganzen und halben Sonnen- und Mondtages, zum Teil aber in — wenigstens für den ersten Anblick — wenig regelmäßigen, mehr oder minder plötzlichen oft sehr heftigen Störungen des Normalzustandes. Nur mit den letzteren Störungen haben wir uns hier zu beschäftigen. Ihre formale Trennung von den regelmäßigen periodischen Vorgängen ist jedoch keineswegs einfach, da diese durch die Störungen verstärkt werden und ferner die Intensität der Störung an einem bestimmten Orte

selbst wieder von der Tageszeit abhängt. Die Intensität der regelmäßigen periodischen Schwankungen am selben Orte wächst ununverkennbar mit der Sonnenhöhe. Die Intensität der Störungen ist im allgemeinen zur Abend- und Nachtzeit stärker, außerdem aber vom jeweiligen Grad der Sonnentätigkeit abhängig.

Diese letztere Abhängigkeit tritt im Verlauf längerer Zeiträume, so in der bekannten elfjährigen Fleckenperiode der Sonne zweifelsfrei hervor. Von Störung zu Störnng, von Tag zu Tag ist jedoch die Zuordnung bestimmter Sonnentätigkeit und bestimmter magnetischer Aktivität trotz vielfacher Versuche nur sehr mangelhaft möglich. Der hauptsächliche Grund hierfür scheint darin zu liegen, daß wir mit unseren bisherigen Beobachtungsmethoden die den magnetischen Störungen zuzuordnenden Vorgänge auf der Sonne nicht genügend scharf zu beobachten und zahlenmäßig zu fassen vermögen. Die photographischen Sonnenaufnahmen im monochromatischen Licht (der Kalzium- oder Wasserstofflinien) geben zeitlich genommen nur schmale Ausschnitte der Sonnentätigkeit in den entsprechenden Sonnenniveaus; ihre physikalische Deutung kann noch nicht als abgeschlossen gelten. Desgleichen geben die Solarkonstantenmessungen nur Augenblickswerte. Sie zeigen von Messung zu Messung mehrprozentige Schwankungen; doch ist noch heute umstritten, wieviel davon durch die wechselnde Transmission der Erdatmosphäre bedingt ist. Die fortlaufenden photographischen Registrierungen des erdmagnetischen Variationsfeldes geben zwar eine kontinuierliche durch die jeweilige Transmission der Erdatmosphäre wohl kaum beeinflußte Kontrolle der Sonne. Es hat jedoch den Anschein, daß wir in den magnetischen Störungen die Wirkung bestimmter eng umgrenzter Areale der Sonnenoberfläche zu erkennen haben, während die Solarkonstantenmessungen über die Gesamtwirkung der ganzen Sonnenscheibe summieren. Bei einigen ganz besonders starken erdmagnetischen Störungen sind in der Nähe des Zentralmeridians der Sonne starke Eruptionen (Flecken und Fackeln) wahrgenommen, und gleichzeitig in einigen wenigen Fällen auch eine starke Änderung der Solarkonstante (11. August 1919 und besonders 23. März 1920). Die erdmagnetische Störung wird wohl durch eine elektrische Ausstrahlung vielleicht aus der Fleckengegend hervorgerufen. Diese Strahlung wird durch die Solarkonstantenmessung direkt gar nicht erfaßt. Es scheint jedoch mit dieser elektrischen Strahlung besonderer Sonnenareale eine Störung der normalen Licht- und Wärmestrahlung verknüpft zu sein, die groß genug ist, um sich in den Messungen der Solarkonstante geltend zu machen.

Auch konnte ich[1]) zeigen, daß sich magnetisch besonders aktive und ebenso besonders ruhige Zeiten nach Ablauf einer Sonnenrotation, nach etwa 27 Tagen, wenn auch im allgemeinen in stark verminderter Intensität wiederholen. Besonders deutlich tritt diese Periode zu Tage in den Jahren geringer Sonnentätigkeit 1911—13; auch dann, wenn die photographischen Aufnahmen der Sonne keine wesentlichen Flecken und Fackeln erkennen lassen. Auch dann scheinen bestimmte Areale der Sonne, die Ausgangspunkte magnetischer Störungen zu sein. Es liegt nahe hier an die „unsichtbaren“ Sonnenflecken zu denken, die Hale auf fleckenfreier Sonne nur durch ihr Magnetfeld aus dem Zeemanneffekt nachweisen konnte. Die sehr seltenen, sehr großen erdmagnetischen Störungen dagegen folgen einander nach Zeiträumen, die nahe ganze Vielfache von 30 Tagen sind. Dies deutet darauf hin, daß hier tiefer gelegene Schichten der Sonne, die langsamer, etwa in 30 Tagen rotieren, immer wieder Veranlassung zu großen erdmagnetischen Störungen geben, daß sich also festliegende mehrere Jahre hindurch wirksame Störungszentren in tieferen unbeweglicheren Sonnenschichten in unveränderter Lage erhalten können.

Der Zusammenhang erdmagnetischer Störungen mit Polarlichtern, und der Umstand, daß beide an der Abendseite der Erde und in hohen Breiten am stärksten entwickelt sind, deutet darauf hin, daß beide nicht durch die Lichtstrahlung der Sonne veranlaßt werden, sondern durch eine elektrische Strahlung, die im Magnetfeld der Erde abgelenkt, vorzugsweise in hohen Breiten an der Nachtseite der Erde eingesogen wird. Es fragt sich, ob diese magnetisch ablenkbare Strahlung erst in der oberen Erdatmosphäre entsteht — etwa durch die ionisierende Wirkung von sehr kurzwelligem Sonnenlicht und durch den Einfluß eines elektrostatischen Feldes, das dort wohl vorhanden sein könnte, oder ob sie direkt von der Sonne ausgesandt wird. Die Rechnungen von Störmer und die Experimente von Birkeland sprechen für die letztere Ansicht. Danach müssen nämlich die Bahnen elektrischer Teilchen, die im Magnetfeld der Erde die Verteilung annehmen, die in der Verbreitung der Polarlichter und magnetischen Störungen über der Erde beobachtet wird, ihren Ursprung in einer zur Erddimension großen Entfernung nehmen.

Von besonderer Bedeutung ist die Beobachtung, daß während der Dauer der sehr großen erdmagnetischen Störungen die Zone

1) Terr. Magn. 1922, S. 57. Ch. Chree hat hierüber an der Hand der Charakterzahlen sehr eingehende Untersuchungen angestellt: Proceed. Roy. Soc. 1923, 1922. Transact. 1913.

der Sichtbarkeit der Polarlichter bis in die Tropen herabgezogen wird, wo Polarlichter zu anderen Zeiten nicht beobachtet werden. In Samoa $13^{1}/_{2}{}^{0}$ S. Breite wurde, soweit bekannt, nur einmal ein Polarlicht beobachtet; und zwar zur Zeit der höchsten Intensität der größten Störung, die seit Beginn der Registrierung 1905 beobachtet wurde; um 6 p. m. Ortszeit am 14. V. 1921 [1]). Die uns bekannten Kathoden- und β-Strahlen besitzen alle eine viel stärkere Ablenkbarkeit im Magnetfeld der Erde, als daß sie von außen kommend bis in die normalen Polarlichtzonen, noch weniger bis in die Tropen herabreichen könnten. Unbekannte negative Strahlen von der erforderlichen Geschwindigkeit, die ganz unwahrscheinliche Werte annehmen müßte, würden andererseits viel tiefer in die Erdatmosphäre eindringen als die beobachtete untere Grenze der Polarlichter (90—100 klm) liegt. Für positive Strahlen liegen die Verhältnisse nicht wesentlich günstiger, außerdem sprechen andere Argumente gegen sie. Es liegt daher nahe anzunehmen, daß außer dem normalen magnetischen Felde der Erde noch ein weiteres außerhalb der Erde gelegenes Feld die Bahn der eindringenden Strahlen derart beeinflußt, daß sie in die beobachteten normalen Polarlichtzonen herabreichen können. Bei großen Störungen muß dieses Feld besonders stark entwickelt sein, sodaß dadurch die Polarlichter noch weiter äquatorwärts bis in die Tropen herabgezogen werden. Die magnetischen Störungen zeigen nun, wie unten eingehender ausgeführt wird, einen bestimmten Störungsanteil, der einem äußeren Feld von den geforderten Eigenschaften entspricht,

Die nächste Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist die Trennung der verschiedenen sich gegenseitig überlagernden Störungsanteile und die Ermittlung der Abhängigkeit der Intensität derselben von Länge und Breite. Die formale Lösung der Aufgabe kann auf zweifache Weise versucht werden. Einmal kann man die Verteilung der Störungsvektoren einer bestimmten Störung über der Erde für denselben Zeitmoment darstellen. Ferner kann man die Störungsvektoren verschiedener Störungen am selben Orte in ihrer Abhängigkeit von der Tages- und Jahreszeit untersuchen. Beide Wege sind in der nachfolgenden Untersuchung beschritten. Bei der physikalischen Deutung der so gewonnenen Zerlegung sind dann die oben erörterten Zusammenhänge zwischen Sonnegtätigkeit, Polarlicht und magnetischen Störungen zu verwenden.

1) Siehe näheres meteorol. Ztschrft 1922 S. 19, 20.

Das Material.

Die hierzu benutzten erdmagnetischen Registrierungen des Samoa-Observatoriums erstrecken sich über die Jahre 1905/20.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich in erster Linie stets auf die erdmagnetischen Verhältnisse in Samoa. Sie haben jedoch — es ist dies genügend nachgeprüft — allgemein für die Tropen Gültigkeit.

Bei der Durchsicht der „Samoa-Registrierungen" treten vor allen drei verschiedene Arten von Störungen hervor. Zu ihrer Charakterisierung wird hier auf das an Tropenstationen am stärksten gestörte Element, die Horizontalintensität H, bezug genommen.

1. Die großen Störungen. Sie beginnen oftmals in einem sehr plötzlichen Anstieg in der Horizontal-Intensität, dem nach $^1/_2$—2 Stunden ein Absinken zu einem Minimum folgt, von dem sich die Intensität nur langsam, oft erst nach einigen Tagen, erholt. Es sind dies die in der Litteratur kurz als „magnetische Stürme" bezeichneten Störungen.

2. Die Bais. Die nächst den Störungen am deutlichsten hervortretende Art von Störungen, jedoch von viel geringerer Intensität, sind die meist zur Abend- und Nachtzeit auftretenden einseitigen positiven baiförmigen Ausbuchtungen in H, von 1—3 Stunden Länge. Ch. Chree hat sie „bays" genannt. Seltener sind die ähnlich verlaufenden, meist um die Mittagszeit auftretenden negativen Ausbuchtungen von H.

3. Die Pulsationen. Dies sind sehr regelmäßige Sinusschwingungen, meist in Form einer gedämpft abklingenden Serie auftretend; von einer Periodenlänge von etwa 1—3 Minuten. Zwischen den Stürmen und Bais bestehen Übergänge. Die Pulsationen dagegen scheinen eine selbständige, von den beiden vorigen verschiedene Störungsart zu sein.

Alle drei Arten von Störungen wurden untersucht. Unter meiner Anleitung hat Herr Studienassessor Dr. phil. W. Meyer[1]) nach den Registrierungen des Samoa-Observatoriums die großen Störungen behandelt, Herr Studienassessor Dr. phil. F. Lubiger[2]) die Bais und Pulsationen. Über die Resultate der ersten Arbeit und über einige inzwischen von mir vorgenommene Ergänzungen, soll hier im Kapitel I berichtet werden.

---

1) Inaugural-Dissertation, Göttingen 1923.

2) Inaugural-Dissertation, Göttingen 1924.

Im Kap. II habe ich dann die größten in Samoa registrierten Störungen mit den Aufzeichnungen andrer Stationen verglichen; im Kap. III die Störungsvektoren bestimmt und die Lage der elektrischen Stromsysteme, die für dieses Stromsystem verantwortlich sind. Sodann sind die möglichen physikalischen Ursachen dieser Stromsysteme besprochen werden. Die Bais und Pulsationen werden im II. Teil dieser Arbeit besprochen werden; dabei wird auch über die Ergebnisse der Arbeit des Herrn Lubiger berichtet werden.

I.

Analyse der großen Störungen nach den Aufzeichnungen in Samoa.

1. Jährlicher und täglicher Gang der Störungshäufigkeit.

Der Katalog der großen am Samoa-Observatorium registrierten Störungen enthält für 102 Störungen aus den Jahren 1905/20 das Datum, die Zeit des Beginnes, des Maximums und des Minimums der Störung in der Horizontal-Intensität; die Dauer der Störung, den Betrag der größten Schwankung für H, D und Z: ferner falls ein plötzlicher Beginn (impetus) der Störung stattfand, das ΔH, ΔD und ΔZ dieses Impetus [1]).

Diese Störungen verteilen sich über die Jahreszeiten wie die folgende Tabelle zeigt:

(Anzahl der magnetischen Störungen)

Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
4	5	14	7	7	3	5	12	15	11	9	10

Die Häufigkeit der Störungen zeigt Maxima zur Zeit der Äquinoxien; Minima zur Zeit der Solstitien.

Die Störungsbeginne, die Maxima und die Minima der Störung in H verteilen sich wie folgt über die Tageszeiten:

Apia Ortszeit	Vormittags							Nachmittags				
	0	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10
Zahl der Störungsbeginne (Impetus)	10	7	7	6	4	9	13	5	9	6	7	6
Zahl der Maxima	4	10	7	4	12	22	25	9	5	3	3	3
Zahl der Minima	7	5	3	0	3	1	1	10	26	20	17	17

1) Der Katalog soll zusammen mit den Reproduktionen der wichtigsten Störungsaufzeichnungen in Samoa demnächst veröffentlicht werden.

Die Mittagszeit scheint den Impetus zu begünstigen.

Die Maxima in H liegen am häufigsten um die Mittagszeit.

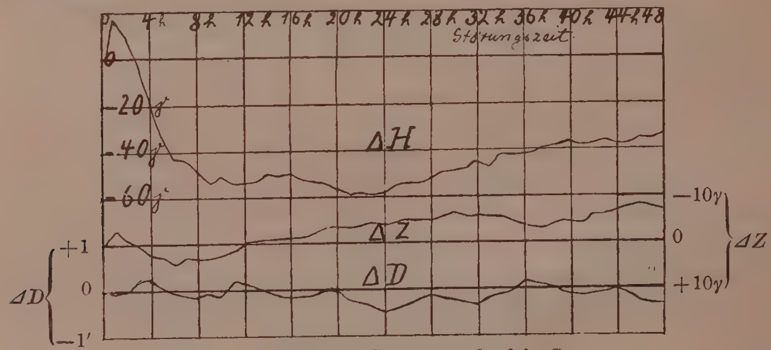
Die Minima am Nachmittag und Abend. Die Verteilung der Störungs-Maxima über den Tag ist durch den normalen täglichen Gang beeinflußt, der für H an ungestörten Tagen ein Maximum um Mittag zeigt.

Die Häufung der Minima am Nachmittag und Abend entspricht jedoch nicht dem normalen täglichen Gange, der von $6p$ bis $6a$ nur wenig Änderung zeigt.

2. Analyse der Störungen nach Störungszeit und Ortszeit. Der allgemeine und der ortszeitliche Störungsverlauf.

Schon diese oberflächliche Orientierung zeigt den Einfluß der Tageszeit auf den Störungsverlauf und zeigt ferner, daß dieser Einfluß zum Teil, aber gewiß nicht ganz durch den normalen täglichen Gang bedingt ist. Die nächste Aufgabe muß also sein, den Störungsverlauf vom normalen täglichen Gang, der an ungestörten Tagen herrscht, zu befreien. Als normaler täglicher Gang wurde der mittlere tägliche Gang an den fünf ruhigsten Tagen des betreffenden Monats angesehen. Der von diesem normalen täglichen Gange befreite Störungsverlauf zeigte wiederum eine Abhängigkeit von der Tageszeit, und zwar ließ sich deutlich erkennen, daß dieser „ortszeitliche Störungsverlauf" ganz anders geartet ist, als der normale tägliche Gang. Diese Abhängigkeit des Störungsverlaufs ist also keineswegs eine bloße Vertiefung des normalen täglichen Ganges, sondern man muß zu seiner Erklärung ein neues und anders gebautes Stromsystem in der Atmosphäre annehmen Die weitere Aufgabe war nun, den im Ablauf eines Tages periodischen Anteil des Störungsverlaufes von dem allgemeinen, von der Tageszeit unabhängigen, Anteil zu trennen. Dies geschah nach einer zuerst von Moos und später von Chapman verwendeten Methode. Es wurden Störungen mit scharf definiertem Störungsbeginn und annähernd gleicher Störungsintensität ausgewählt und zwar 36 Störungen, deren Beginn sich möglichst gleichmäßig über die Tageszeiten verteilen, sodaß also auf je zwei Stunden möglichst drei Störungsbeginne fallen. Aus diesen Störungen wurde dann durch Mittelbildung auf zwei verschiedene Weisen ein mittlerer Störungsverlauf gebildet. Es wurden hierbei die Stundenmittelwerte zugrunde gelegt. Einmal wurden diese Stundenmittelwerte der 36 Störungen nach Störungszeit (gezählt von Beginn der Störung) unter einander gelegt und gemittelt, sodaß die Stundenmittel gleicher

Störungszeit einander zugeordnet waren. Der sich ergebende „allgemeine Störungsverlauf“ ist von dem mit der Tageszeit periodischen Anteil dem „täglichen Störungsverlauf“ befreit. Sodann wurden dieselben (vom normalen täglichen Gang befreiten) Stundenmittel der Störungen nach Tageszeit untereinander gelegt. Der sich jetzt durch Mittelung ergebende „ortszeitliche Störungsgang“ enthält den allgemeinen von der Tageszeit unabhängigen Störungsgang in gleichförmiger Weise als einen für jede Tagesstunde konstanten Betrag, und kann daher durch Vergleich mit dem Normalwert in Abzug gebracht werden. Voraussetzung ist in beiden Fällen, daß bei Mittelbildung über 36 Störungen sich diejenigen Störungsbeträge gegenseitig aufheben, die von der verschiedenen Intensität der einzelnen Störungen herrühren und ebenso die Unregelmäßigkeiten im Störungsverlauf, die in den beiden Hauptstörungsanteilen (dem „allgemeinen“ und „ortszeitlichen“) nicht enthalten sind. Das Ergebnis der Rechnung rechtfertigte diese Voraussetzung. Das Resultat dieser Rechnung zeigt Fig. 1 und 2. $\varDelta H$ und $\varDelta Z$ sind in γ (10^{-5} c. g. s) $\varDelta D$ in Bogenminuten angegeben. Zunehmende Horizontal-Intensität, zunehmende östliche Deklination und zunehmende Vertikalintensität sind positiv gerechnet. (Da Z in Samoa negativ ist, bedeutet $+\varDelta Z$ ein Abnehmen des numerischen Wertes von Z d. h. ein Bewegen des Nordendes der Magnetnadel nach abwärts.). Die Darstellung erstreckt sich je über 48 Stunden.



Figur 1. Allgemeiner Störungsverlauf in Samoa.

Der allgemeine Störungsverlauf (Fig. 1 und Tabelle am Schluß) zeigt für $\varDelta H$ drei Phasen. Zuerst während der ersten Störungsstunden ein positiver Anstieg auf $\varDelta H = +17\gamma$. Im folgenden die Vorphase genannt. Zweitens ein Abstieg erst schneller bis zur 9ten Stunde auf $H' = -54\gamma$; dann langsam bis zur 21sten Stunde auf

$\Delta H = -59\gamma$ die Hauptphase; drittens die langsame über mehrere Tage andauernde Erholung; am Ende des zweiten Tages ist ΔH auf -33γ zurückgegangen; dies ist die Nachstörung.

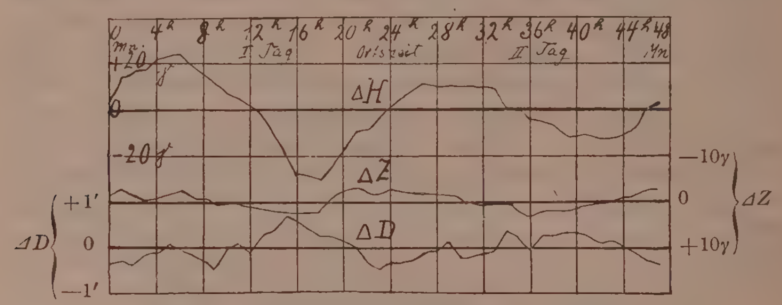
ΔZ zeigt in den ersten 48 Stunden gleichfalls drei Phasen. In der ersten Stunde ein Abstieg auf $\Delta Z = -3\gamma$; zweitens ein Anstieg auf $\Delta Z = +4\gamma$, das in der 6sten Stunde erreicht wird; drittens ein Abstieg bis auf $\Delta Z = -8\gamma$, das erst gegen Ende des zweiten Tages erreicht wird. Das Minimum bildet sich erst später und sehr langsam zurück, ob es sich überhaupt ganz zurückbildet, ist schwer zu entscheiden, da das Ende schon in die nächste Störung überzugehen pflegt. Es ist möglich, daß hierbei instrumentelle Mängel zur Geltung kommen. Dies Verhalten der letzten Phase von Z zeigt sich in gleicher Weise an anderen Stationen. (Siehe Chapman Proc. Roy. Soc. 1918 S. 65.) Dort sind aber auch die gleichen instrumentellen Mängel geltend zu machen. Die drei Phasen von ΔZ fallen zeitlich nicht ganz mit denen von ΔH zusammen. Da ΔH den Hauptanteil des Störungsvektors in den Tropen liefert, wollen wir ΔH für die hier zunächst rein formale Einteilung der Störung in die drei Phasen: Vorstörung, Hauptstörung und Nachstörung zugrunde legen.

ΔD verhält sich durchaus von ΔH und ΔZ abweichend. Es zeigt während der ersten beiden Stunden eine sehr geringe Bewegung nach West. $\Delta D = -0.'05$; sodann regelmäßige Schwingungen von im Mittel 8stündiger Dauer, und 0.'3 bis 0.'4 Amplitude, beginnend mit einer Ostwärtsbewegung. Die Mittellage, um welche diese Schwingungen erfolgen, ist gegen Ende des ersten Tages um etwa 0.'2 nach Westen verschoben.

Der Vergleich mit den Ergebnissen, die Chapman aus Mittelung der Störungsaufzeichnungen von zwei Stationen nördlicher und eine südlicher Tropen gewonnen hat, zeigt besonders für ΔZ wichtige Abweichungen. Dort ist ΔZ in den ersten 6^h negativ, und dann bis zum Ende des zweiten Tages positiv. Die 8stündigen sehr regelmäßigen Schwingungen in ΔD fehlen dort. Der Abstieg in ΔH ist in den ersten 6^h in Samoa viel steiler.

Der ortszeitliche Störungsverlauf Fig. 2 und die Tabelle am Schluß zeigt für ΔH am ersten und zweiten Tage je eine eintägige sinusähnliche Schwingung. Die Amplitude (Max-Min.) beträgt am ersten Tage 54γ, am zweiten 23γ. Das Maximum liegt bei 6^a, das Minimum bei 6^p. Für ΔZ und ΔD ist der Verlauf weniger deutlich ausgesprochen. ΔZ zeigt im wesentlichen eine ganztägige Schwingung von etwa 4—5γ Amplitude. Das Maximum liegt am Mittag bis Nachmittag, das Minimum während der Nacht. ΔD zeigt besonders am ersten

Tag zwei Maxima um 5^a und 3^p und zwei Minima um 9^a und 11^p, ähnlich dem normalen täglichen Verlauf. Die Amplitude (Hauptmax.-Hauptmin.) beträgt $D = 1.'0$. Die Bewegung von $\varDelta H$ im Laufe des Tages erfolgt um eine mittlere Lage, die nicht mit dem ungestörten von H vor Beginn der Störung zusammen fällt, sondern um 45γ tiefer liegt, d. h. der allgemeine Störungsverlauf macht



Figur 2. Ortszeitlicher Störungsverlauf in Samoa.

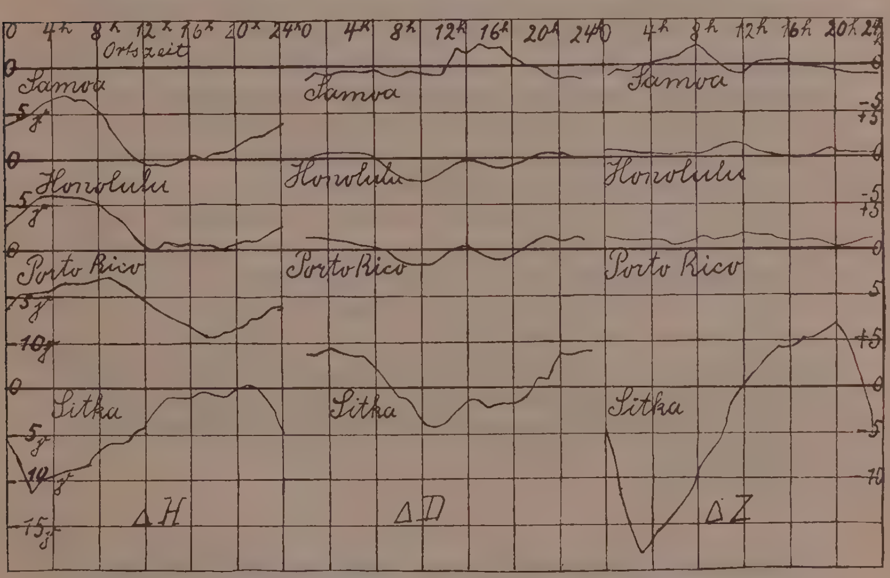
sich am ersten Tage im Mittel der 36 benutzten Störungen mit einem konstanten $\varDelta H = -45\gamma$ geltend, um den dann als Mittellage der ortszeitliche Störungsverlauf schwankt. Der letztere hat also eine Amplitude von nahe gleicher Größe ($\varDelta H = -54\gamma$) wie der mittlere Betrag des allgemeinen Störungsverlaufes. Der Vergleich mit Chapmans Untersuchung zeigt für $\varDelta H$ einen ähnlichen, für $\varDelta D$ und $\varDelta Z$ einen abweichenden Verlauf.

3. Die Differenzenkurven.

Der Bestandteil der magnetischen Störungen, der durch den oben abgeleiteten „ortszeitlichen Störungsverlauf" dargestellt wird, muß in dem mittleren täglichen Gang der Stundenmittel, abgeleitet aus allen Tagen eines Monats oder Jahres auch enthalten sein. Er wird dagegen fehlen oder doch mindestens stärker abgeschwächt sein in dem täglichen Gang, der nur aus den ungestörten Tagen gebildet wird. Die Differenz beider Gänge muß den „ortszeitlichen Störungsverlauf" ergeben. Die obigen Differenzen beider Gänge wurden gebildet für H, D, Z für drei Tropenstationen Samoa, Honolulu und Portorico. Samoa aus den Jahren 1905—18 Honolulu, Portorico aus den Jahren 1905—14. Ferner für Sitka eine Station hoher magnetischer Breite gleichfalls aus 1905/14. Für Sitka sind diese Differenzen besonders roß. Sie, zeigen im Laufe des Jahres den typischen jährlichen Gang. $\varDelta H$

ΔD und ΔZ besitzen ausgesprochene Maxima zu den Äquinoxien und Minima zu den Solisticien.

Der tägliche Gang dieser Differenzen (Fig. 3 und Tabelle am Schluß) für die drei Tropenstationen sieht dem im vorigen Abschnitt aus den Störungen berechneten täglichen Störungsverlauf für Samoa durchaus ähnlich, besonders für den Hauptanteil des Störungseffektes für ΔH. Die Amplituden sind hier geringer. Für die drei Tropenstationen ergab sich im Mittel $\Delta H = 6—7\,\gamma$; $\Delta D = 0.'4$; $\Delta Z = 1—2\,\gamma$. Der Gang von ΔD ergab sich für Samoa aus den Differenzen etwas abweichend von dem Gang aus Störungen. Der Vergleich beider Kurve mit dem normalen



Figur 3. Ortszeitlicher Störungsverlauf aus Differenzen des täglichen Ganges an allen und ruhigen Tagen; ΔH, ΔZ und ΔD in γ; nach oben positiv.

täglichen Gang zeigt, daß der ortszeitliche Verlauf von ΔD aus Störungen noch einen Rest des normalen, täglichen Verlaufes enthält. Durch die Subtraktion des täglichen Ganges an ruhigen Tagen ist also derselbe noch nicht aus dem Störungsverlauf entfernt. Das deutet darauf hin, daß während der Störungen das Feld des normalen täglichen Ganges vertieft wird; ein Vorgang, der zuweilen direkt aus den Störungsbildern ersichtlich ist. Für die Station hoher magnetischer Breite Sitka ergab sich für ΔH und ΔZ ein abweichender Verlauf. ΔH ver-

läuft spiegelbildlich zu der Tropenstation. Das Minimum tritt um 3^a, Maximum um 9^p ein; die Amplitude beträgt 12γ. ΔZ zeigt im Gegensatz zu den Tropen einen sehr starken Gang; $\Delta Z = 21\gamma$. Das Minimum liegt um 3^a, das Maximum um 9^p. ΔD zeigt einen ähnlichen Gang wie in den Tropen; die Amplitude: $\Delta D = 1.'3$.

Der Verlauf der Differenzenkurven in den hohen und niederen magnetischen Breiten zeigt hiernach Gegensätze und Ähnlichkeiten von durchaus ähnlicher Art wie der normale tägliche Gang. Auch dieser verläuft in hohen magnetischen Breiten für H und Z im wesentlichen spiegelbildlich zu dem in niederen Breiten, für D ähnlich.

Die Mittellagen der Differenzenkurven zeigen besonders für ΔH eine erhebliche Verschiebung gegen die Nullage des täglichen Ganges; ebenso wie der ortszeitliche Störungsverlauf, wo ΔH für Samoa um eine gegen den ungestörten Wert erniedrigte Mittellage schwankt. Es ist der Einfluß des allgemeinen Störungsverlaufes. Er ist auch hier in den Differenzenkurven merkbar. Die Erniedrigung der Mittellage ist fast ebenso groß wie die Amplitude des täglichen Ganges der Differenzen aus allen und ruhigen Tagen. Dasselbe Verhältnis ergab sich für den allgemeinen und ortszeitlichen Störungsverlauf aus der Analyse der Störungen.

Es hat sich also gezeigt, daß die wesentlichen Züge des ortszeitlichen Störungsverlaufes sowohl aus der Analyse der Störungen, als auch durch die Differenzenkurven gewonnen werden können; nicht dagegen die Einzelheiten des allgemeinen Störungsverlaufes, der sich in den Differenzenkurven nur in seinem mittleren Betrag geltend macht.

II.

Analyse der großen Störungen nach den Aufzeichnungen an verschiedenen Stationen mittlerer und niederer Breite.

1. Die Vorphase.

Die bisherigen Untersuchungen ergaben einen mittleren Störungsverlauf und seine Abhängigkeit von der Tageszeit. Zur ersten Orientierung ist dies geeignet. Zur näheren Verfolgung des Ablaufes einer Störung ist aber der Vergleich derselben Störung an verschiedenen Orten notwendig. Ich habe deshalb zum Vergleich die Aufzeichnung geeignet gelegener Stationen mittlerer und niederer Breite herangezogen. Die Notwendigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus dem Folgenden. Allgemein enthält in jedem Augenblick einer Störung der Wert eines erdmagnetischen Elementes h folgende Anteile:

n den Anteil des normalen permanenten Feldes,
T „ „ „ „ täglichen Variationsfeldes (täglicher Gang an ruhigen Tagen),
a „ „ „ allgemeinen Störungsfeldes,
t „ „ „ ortszeitlichen Störungsfeldes, in dem auch noch ein Anteil T enthalten ist, falls bei der Störung eine Vertiefung des normalen täglichen Variationsfeldes stattfindet.
$\varDelta$ „ „ der Unregelmäßigkeiten des Störungsverlaufes.

Da n, T und $\varDelta$ eliminiert wurden, lieferte uns die Analyse a und t; letzteres jedoch behaftet mit einem mittleren Anteil von a.

Um die Darstellung des Rechenschemas zu vereinfachen, seien 24 Störungen gleicher Intensität gegeben. Je eine beginne um 1, 2, 3, ... 24^h Ortszeit. Die Indizes von a beginnen für jede Störung nach ihrer Störungszeit, die Indizes von t nach Ortszeit. Die aufeinanderfolgenden Stundenmittel einer Störung, die um 5^h Ortszeit beginnt, sind also: $a_1 + t_5$; $a_2 + t_6$; ... $a_{24} + t_4$ für eine Störung, die um 6^h Ortszeit beginnt $a_1 + t_6$ ... Da sie sich nur durch ihren Anfang unterscheiden sollen, so sind sie durch diese Anteile restlos darstellbar, und das a_1, a_2, ... der ersten Störung ist dem a_1, a_2 der zweiten gleich, ebenso das t_1, t_2 ... Es ergibt sich also

1^h	2^h	3^h	.... 23^h	24^h	Ortszeit
$a_1 + t_1$	$a_2 + t_2$	$a_3 + t_3$	.... $a_{23} + t_{23}$	$a_{24} + t_{24}$	Stundenmittel
$a_2 + t_1$	$a_3 + t_2$	$a_4 + t_3$	.... $a_{24} + t_{23}$	$a_1 + t_{24}$	
⋮					
$a_{24} + t_1$	$a_1 + t_2$	$a_2 + t_3$	.... $a_{22} + t_{23}$	$a_{23} + t_{24}$	
$t_1 + \frac{1}{24}\sum_1^{24} a$	$t_2 + \frac{1}{24}\sum_1^{24} a$	$t_3 + \frac{1}{24}\sum_1^{24} a$	$t_{23} + \frac{1}{24}\sum_1^{24} a$	$t_{24} + \frac{1}{24}\sum_1^{24} a$	Mittelwert

Wir erhielten also den ortszeitlichen Störungsgang t_1 bis t_{24}, aber behaftet mit einem Anteil des mittleren allgemeinen Störungsganges.

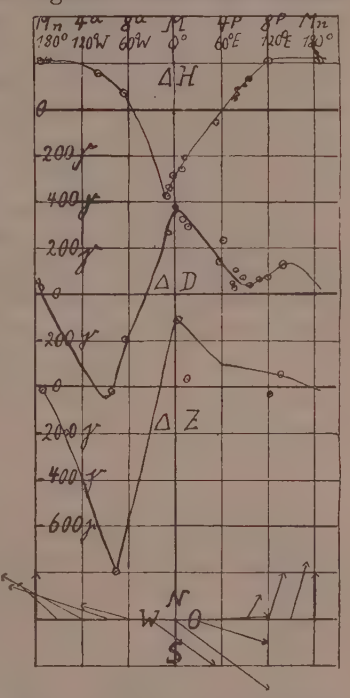
In Wirklichkeit sind nun die benutzten Störungen an Intensität und auch in der Form ihres Ablaufs von einander verschieden. Der Versuch der Analyse zeigte jedoch, daß die Mittelbildung über 36 Störungen diesem Umstand genügend Rechnung trägt; und mittlere Störungsverläufe abgeleitet werden konnten. Der so abgeleitete örtliche Störungsverlauf ist ein mittlerer, d. h. er ist für je eine bestimmte Ortszeitstunde z. B. 1^h das Mittel über alle An-

teile t gebildet, die den verschiedenen Störungszeiten 1^h bis 24^h zugehörten. Falls die einzelnen Phasen des allgemeinen Störungsverlaufes je einen besonderen ortszeitlichen Störungsverlauf besitzen, so tritt dies hier noch nicht zu Tage.

Es ist nun zu vermuten, und es hat sich im Lauf dieser Untersuchung bestätigt, daß der ortszeitliche Störungsverlauf der Vor- und Hauptphase verschieden ist. Die Vorphase ist jedoch an Dauer und Intensität viel geringer als die Hauptphase. Ihr besonderer ortszeitlicher Gang hat daher bei der obigen Ableitung des ortszeitlichen Störungsverlaufes nur wenig Einfluß gehabt. Wir können daher den bisher abgeleiteten ortszeitlichen Störungsverlauf als den der Hauptphase ansehen. Der ortszeitliche Verlauf der Vorphase zeigt nun eine Abhängigkeit von der Intensität der Störung, die die Untersuchung erschwert. Das bisherige Verfahren verschiedener Störungen an derselben Station zu vergleichen, führt hier wegen der Abhängigkeit von der Intensität zu unsicheren Ergebnissen. Es wurde daher die Vorphase derselben Störung an verschiedenen Stationen in ihrer Abhängigkeit von der geographischen Länge (Tageszeit) untersucht. Benutzt wurden die Störungen vom 25. Sept. 1909, vom 14. Mai 1921, vom 26. August 1916 und vom 9. August 1917. Die beiden ersten sind wohl die beiden stärksten Störungen, die bisher von Observatorien aufgezeichnet wurden. Für die erste Störung konnten 21 Stationen aus niederen und mittleren Breiten (teils unvollständig) benutzt werden; für die zweite konnte bisher nur wenig Material beschafft werden; bei beiden machte sich störend geltend, daß die Aufzeichnungen an vielen auch tropischen Stationen wegen der großen Intensität der Störung unvollständig sind. Die Störung vom 21. Mai 1921 ist wohl nur in Samoa vollständig aufgezeichnet. Die Störungen vom August 1916 und 1917 sind von geringerer Stärke als die beiden ersten. Sie haben die Charakterzahl 1.9 und 2.0. Die Aufzeichnung von 10 geeignet über die Erde verteilten Stationen wurde bei diesen Störungen benutzt. Es wurde, sowohl der erste Einsatz der Vorphase, der Impetus, verglichen, wie auch der Mittelwert der ersten halben Störungsstunde.

Aus dem Vergleich der oben genannten Störungen ergab sich, daß die erste halbe Störungsstunde der Vorphase bei den sehr starken Störungen vom 25. IX. 1909 und 14. V. 1921 an Stationen niederer und mittlerer Breite an der Nachtseite ein positives, an der Tagseite ein negatives ΔH, gegenüber dem ungestörten Wert von H vor Beginn der Störung, besitzt; bei Störungen geringerer Intensität ist ΔH auch an der Tagseite positiv, jedoch schwächer

als an der Nachtseite. Die Mittelwerte von $\varDelta H$ für die erste halbe Störungsstunde liegen (Fig. 4) an den verschiedenen Stationen für die Störung vom 25. IX. 1909 auf einer Kurve von ähnlichem Verlauf wie der normale tägliche Gang in mittleren Breiten (40—60°) oder entgegengesetzt wie der normale tägliche Gang in den Tropen. Das entsprechende $\varDelta D$ verläuft entgegengesetzt wie der normale tägliche Gang. Hierbei wurde in der Figur $\varDelta D$ an Stationen südlicher Breite nach Westen positiv gerechnet. Die südliche Halbkugel zeigt einen zur Nordhalbkugel entgegengesetzten Verlauf von $\varDelta D$. In hohen magnetischen Breiten tritt eine Umkehr der Richtung der Störungsvektoren auf gegenüber der Richtung in mittleren und niederen Breiten, ähnlich wie beim ortszeitlichen Störungsverlauf. Toronto zeigte ($6^1/_2{}^a$ Ortszeit) $\varDelta H < -400\,\gamma$, Jekaterienburg ($4^p$ Ortszeit) $\varDelta H = +500\,\gamma$. Diese beiden Stationen sind in der Figur für $\varDelta H$ daher nicht benutzt. Trotz der verschiedenen Breiten von 20° S bis 54° N zeigte besonders $\varDelta H$ der Vorphase am 25. IX. 1909 einen einfachen fast nur von der Länge abhängigen Verlauf: positive Werte an der Abend-, Nacht- und Morgenseite, ein scharf ausgeprägtes Minimum um Mittag. Die Störung vom 14. Mai 1921, die von gleicher Größe ist, bestätigt, soweit mir bisher Beobachtungen vorliegen, dies Resultat. Die Störung vom 26. Aug. 1916 zeigt das Mittagsminimum in $\varDelta H$ weniger ausgeprägt; die Störung vom 9. Aug. 1917 zeigt um Mittag wohl geringere, aber keine negativen Werte für $\varDelta H$.



Figur 4. $\varDelta H$, $\varDelta D$, $\varDelta Z$ und Störungsvektoren ($1^{mm} = 30\,\gamma$) zu Beginn der Störung vom 25. Sept. 1909 als Funktion der geographischen Länge.

2. Schwingungen.

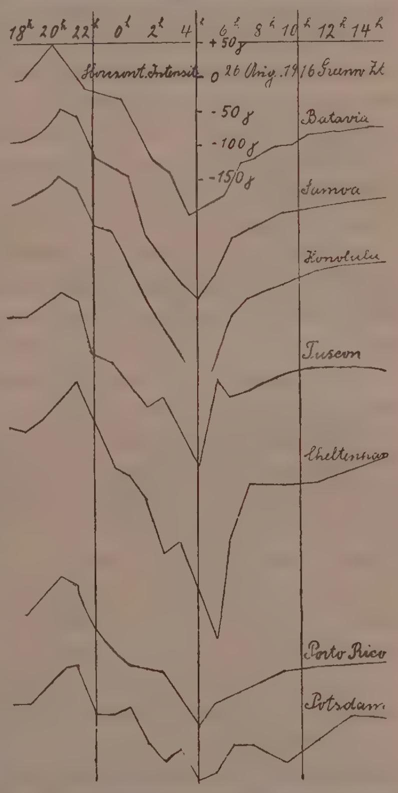
Der gestörte Verlauf erdmagnetischer Aufzeichnungen unterscheidet sich vom ungestörten an Stationen niederer Breite durch einseitige und schwingungsförmige Ausbuchtungen von sehr verschiedener Dauer und Intensität. Die Dauer der Schwingungen variiert von Minuten bis zu mehreren Stunden. Einfach verlau-

fende, zuweilen jedoch sehr intensive Störungen bestehen im Wesentlichen aus einer einzigen unsymmetrischen Schwingung von längerer Dauer (¼—½ Tag), die ähnlich einer aperiodisch gedämpften Welle verläuft. Diese Hauptschwingung umfaßt, was bisher als Vor- und Hauptstörung bezeichnet wurde. Nach dem Ablauf der Hauptschwingung ist der vor der Störung herrschende ungestörte Normalzustand jedoch noch nicht wieder erreicht. Die jetzt noch vorhandene Nachstörung führt diesen erst allmählich, oft erst in mehreren Tagen wieder herbei. Die Hauptschwingung erfolgt also nicht um den Normalzustand als Mittellinie, sondern um eine gegen diese verschobene und geneigte Linie, deren Verschiebung und Neigung durch die schon während der Hauptschwingung vorhandene Nachstörung bedingt ist. Die Hauptschwingung erfolgt also um einen während der Dauer der Schwingung veränderlichen Mittelwert. Beispiele für einen solchen einfachen Verlauf in Samoa bieten die Aufzeichnungen der folgenden Störungen. (Siehe auch die Tafel am Schluß.)

Datum	Weltzeit	ΔH (Max.-Min.)	Dauer der Schwingung
26./27. August 1916	20^h	300 γ	11^h
7./8. März 1918	21	320	7
5. September 1917	6	160	6
17. Juni 1915	2	500	12
29. September 1908	2	300	6
11. August 1919	7	500	6
14. März 1913	4	85	4
9. August 1917	4	300	7

Um festzustellen, ob eine solche Hauptschwingung der Störung auch an anderen Orten auftritt und ob sie nach Ortszeit oder Weltzeit abläuft, wurden die Aufzeichnungen verglichen von 10 Observatorien (Fig. 5), 4 aus niederen und 6 mittleren Breiten. 4 Paar dieser Stationen besitzen nur 1^h Längendifferenz: Potsdam-Del Ebro; Lukiapang-Batavia; Honolulu-Samoa; Cheltenham-Porto-Rico. Für die fünfte Gruppe Sitka-Tuscon beträgt die Längendifferenz $1\frac{1}{2}^h$. Die Längendifferenz der Gruppen sind in Stunden ostwärts 7, 5½, 3½, 3½, 5. Der Abstand ihrer Breiten 36°, 35°, 23°, 20°, 13°. Als Beispiel soll die Störung vom 26. VIII. 1916 dienen. Der Verlauf der Horizontalintensität zeigt an allen Stationen mit Ausnahme Sitkās einen durchaus ähnlichen Verlauf, der die Hauptschwingung überall in ähnlicher Weise hervortreten läßt. Die Horizontal-Inten-

sität verhält sich in Samoa und Honolulu trotz der 4000 klm Abstand in allen erkennbaren Einzelheiten überraschend ähnlich und gleichsinnig in den Bewegungen, die innerhalb der Meßgenauigkeit der Reproduktion auch gleichzeitig sind. Die Amplitude der Schwingung in H wächst bei gleicher Länge ein wenig mit der Breite. Die Deklination verläuft in Honolulu und Samoa im Wesentlichen spiegelbildlich, westlichen Bewegungen in Honolulu entsprechen östliche in Samoa. Auch in der Vertikal-Intensität tritt der Schwingungscharakter deutlich hervor. In Batavia und Porto Rico ist ΔZ stärker als auf den Stationen nahe gleicher Länge aber höherer Breite Lukiapang und Cheltenham. Im allgemeinen zeigt ΔZ an den einzelnen Stationen starke Verschiedenheiten, die zum Teil bei der geringen Größe der Bewegung durch die Mangelhaftigkeit der magnetischen Wage veranlaßt sein mögen, zum Teil aber auch auf örtlicher Verschiedenheit des im Erdboden inducierten Störungssystems beruhen werden. Auch in Lukiapang, in Tuscon und Porto Rico traten die Phasen der Hauptschwingung in H gleichzeitig mit Samoa ein; ebenso einige der überlagerten Einzelheiten. Das Bild verliert jedoch an Ähnlichkeit, da die Intensität bestimmter superponierten Bewegungen nicht an allen Stationen gleich groß ist. Die Intensität dieser Überlagerungen nimmt mit höherer magnetischer Breite schnell zu. In gleicher Breite ist sie von der Tageszeit abhängig. Es sind dies die Wirkungen eines besonderen Störungssystems, das seinen Sitz in hohen Breiten hat. In mittleren magnetischen Breiten treten daher überlagerte Bewegungen schon stark hervor, die in niederen Breiten noch ganz fehlen. Schon in Cheltenham und Potsdam beherrschen sie das Störungsfeld so sehr, daß die Hauptschwingung dagegen



Figur 5. Störungen vom 26. Aug. 1916 nach Greenwich-Zeit; $1^{cm} = 100\,\gamma$.

zurücktritt, wenngleich sie noch vorhanden ist. Solche starke Überlagerungen können nun auch die Tiefe und Lage des Minimums beeinflussen; so bei Cheltenham. Hiervon abgesehen liegt das Minimum auf allen Stationen außer Sitka zur selben Stunde $4-5^h$. Das Minimum ist für Stationen gleicher magnetischer Breite an der Abendseite am tiefsten. Für Samoa tiefer als für Batavia. Das Ende der Hauptschwingung tritt in manchen Störungen in den Tropen fast ebenso auffallend auf, wie der plötzliche Anfang. Bei dieser Störung endet die Schwingung von etwa elfstündiger Dauer auch in mittleren Breiten mit einem deutlichen Abbruch der unruhigen Überlagerung; gleichzeitig ist der schnelle Anstieg vom Minimum beendet und ein viel langsamerer Anstieg zum Normalwert setzt ein. Dies zeigt sich als auffallender Knick. Der Knick liegt für Honolulu, Samoa, Porto Rico bis aufwenige Minuten (bei $5^3/_4{}^h$), für die anderen Stationen außer Sitka innerhalb einer Stunde gleaichzitig. Er ist an der Abendseite und Nachtseite stärker entwickelt.

Sitka verhält sich als Station hoher magnetischer Breite in allem ganz abweichend. Zur Zeit des Minimums der Horizontal-Intensität in den Tropen herrscht in Sitka ein ausgeprägtes Maximum; Vorstörung und Nachstörung sind sehr gering. In Sitka herrscht das polnahe Störungssystem vor; dasjenige niederer Breiten tritt dagegen zurück.

Die Beziehungen, die sich hier aus der Störung vom 26. Aug. 1916 ableiten lassen, haben sich an den anderen Störungen bestätigt, sodaß man sie als eine Gesetzmäßigkeit ansehen kann. Bei den meisten Störungen ist das Störungsbild auch in den Tropen nicht so einfach wie in den obigen Beispielen, wo nur eine Hauptschwingung vorliegt. Ein wesentlicher Grund hierfür ist, daß sich der Vorgang der Hauptschwingung vor Ablauf derselben oft mehrmals mehr oder minder stark wiederholt[1]). Eingeleitet durch die übliche mit einem Impetus beginnende Vorphase, superponiert sich eine zweite, zuweilen später noch eine dritte u. s. w. Schwingung über die Hauptschwingung. Die Hauptschwingung in H erfolgte nicht um die Normallage als Mittellinie, sondern um eine niedrigere, geneigte Mittellage, die also während der Dauer der Schwingung veränderlich ist. Die Kombination der ersten Hauptschwingung und der später einsetzenden zweiten Schwingung erfolgt nun um eine stärker verschobene und stärker geneigte Lage. Da die superponierte Schwingung zu einer anderen Tageszeit beginnt, kann

1) Siehe Tafel I. Störung vom 9. VIII. 1917 6^h.

auch hierdurch ihr Aussehen der ersten Hauptschwingung gegenüber verändert sein, da ja Impetus, Vor- und Hauptphase in ihrer Intensität, jedes in besonderer Weise, von der Tageszeit abhängt. An anderen Stationen kann die superponierte Schwingung der Tageszeit entsprechend stark zurücktreten oder verschwinden. Die superponierten Schwingungen erfolgen, wie besonders ihre Impetus lehren, gleichzeitig auf allen betrachteten Stationen. Besonders wenn sie stark entwickelt sind, verlängern sie die Dauer der Störung erheblich über den Ablauf der ersten Hauptschwingung hinaus. Zu den Hauptschwingungen und den superponierten tritt nun noch der normale tägliche Gang und zwar mit verstärkter Intensität, sodaß er also rechnerisch nicht durch Subtraktion des bekannten Gang an ruhigen Tagen vollständig eliminiert werden kann. Diese Einwirkung des täglichen Ganges kann je nach der Tageszeit den Schwingungsvorgang verstärken oder abschwächen. Auch die größten Störungen vom 25. IX. 1909 und 14. V. 1921 unterscheiden sich von den beschriebenen Störungen nur durch die Heftigkeit und Intensität ihrer Bewegung. Bei beiden Störungen ist eine Grundschwingung mit scharf begrenztem Anfang und Ende unverkennbar; bei der ersten Störung von 8-, bei der zweiten von 12 stündiger Dauer. Die Stationen an der Mittagsseite zeigen bei diesen Störungen den Impetus in H negativ (z. B. S. Fernando am 25. IX. 1909, Samoa am 14. V. 1921). Dementsprechend beginnt die Hauptschwingung gleich von Anfang an um eine nach niederen Werten verschobene Mittellinie. Gegenüber dieser verschobenen Mittellinie erfolgt der erste Teil der Hauptschwingung, die Vorphase, an den beiden obigen Stationen positiv; gegenüber dem normalen Vorstörungswert dagegen erscheint die Vorphase negativ und dem Aussehn der Störung geht daher der Schwingungscharakter für den ersten Anblick verloren. Gerade hierin liegt ein wichtiges Argument, das zu der Anschauung führt, daß Impetus und Vorphase eine gewisse physikalische Unabhängigkeit besitzen. Anfang und Ende der Hauptschwingung sind bei beiden Störungen besonders an der Abendseite scharf begrenzt und durch heftige Bewegung ausgezeichnet gegenüber der vorangehenden bezw. nachfolgenden relativen Ruhe.

Zu den bisher beschriebenen Vorgängen, die an niederen Breiten im wesentlichen gleichzeitig und ähnlich erfolgen, treten besonders in höheren Breiten Bewegungen, die nicht gleichzeitig und gleichsinnig erfolgen, sondern von Station zu Station Phasendifferenzen aufweisen und zwar in dem Sinne, daß die Abendseite in der Phase voraus zu sein scheint. Mit diesen Vorgängen wird sich ein anderer

Teil dieser Arbeit befassen. Hier soll nur hervorgehoben werden, daß in den Tropen neben der Nachstörung die gleichzeitig und gleichsinnig erfolgende Hauptschwingung das wesentliche ist und selbst auf die Entfernung eines halben Erdquadranten noch alle Überlagerungen gleichsinnig und gleichzeitig erfolgen.

Die Amplitude der Schwingung ΔH ist von der Ortszeit abhängig. Am deutlichsten tritt dies zu Tage bei Schwingungen kurzer Dauer, die auf der einen Station ganz am Morgen, auf der andern Station ganz am Abend verlaufen. An der Abendseite ist die Amplitude erheblich größer.

7./8. III. 1918, 21^h—$3\frac{1}{2}^h$ Greenw.-Zeit		ΔH in γ
Lukiapang	5^a—$11\frac{1}{2}^a$ Ortszeit	250
Porto Rico	5^p—$11\frac{1}{2}^p$ „	340
5. IX. 1917, 6—$11\frac{1}{2}^h$ Greenw.-Zeit		
Lukiapang	2^p—$8\frac{1}{2}^p$ Ortszeit	200
Porto Rico	2^a—$8\frac{1}{2}^a$ „	95

Bei der oben behandelten Störung vom 26. VIII. 1916 tritt dies wegen der langen Dauer der Schwingung fast 12^h verhältnismäßig wenig zu Tage. Auf fast jeder Station liegt ein Teil der Schwingung am Vormittag und ein Teil am Nachmittag.

3. Die Nachstörung.

Nach den bisherigen Ausführungen gliedert sich eine große Störung in folgende Phasen (vergl. hierzu auch die Tafel am Schluß):

1. Der Impetus, eine plötzliche Bewegung vor allem in H, die die Hauptschwingung einleitet.

2. Die Hauptschwingung mit erst positiven, dann negativen ΔH; sie umfaßt im wesentlichen das, was in Cap. I unter Vor- und Hauptstörung verstanden wurde, nur daß dort durch die Mittelbildung über Störungen, welche Schwingungen verschiedener Periodenlänge enthielten, der Schwingungscharakter in dem mittleren allgemeinen Störungsverlauf nicht mehr zum Ausdruck kommt.

3. Die Nachstörung, die schon während der Hauptschwingung vorhanden ist, aber erst nach Ablauf derselben rein zu Tage tritt.

a) Abhängigkeit der Nachstörung von der Poldistanz.

Schon in einer früheren Arbeit (Göttinger Nachrichten 1911) habe ich darauf hingewiesen, daß der Verlauf aufeinander folgender

24stündiger Mittelwerte der Horizontalintensität nach einer Störung eine wohlausgesprochene Abhängigkeit von der Breite zeigt.

Der Betrag der Nachstörung in H, gleich nach Ablauf der Hauptschwingung zeigt gleichfalls eine deutliche Beziehung zur geographischen Lage der Station und zwar, wie eine nähere Untersuchung zeigte, besonders zum Abstand u der Station von der nördlichen (bzw. südlichen) Spur der magnetischen Axe der Erde (die man nach den neueren Vermessungsresultaten der Carnegie Institution für den inneren Magnetismus bei $78^1/_2{}^0$ N 69^0 W zu suchen hat). Die Beziehung ist jedoch nicht so einfacher Art, daß sie schon durch den $\sin u$ genügend genau dargestellt wird. Der Wert des Nachstörungsbetrages $\varDelta H$, wurde gemessen gegen den ungestörten Wert von H vor Beginn der Störung. $\varDelta H$ wurde befreit von dem normalen täglichen Gang. Es wurden für die Störung vom 25. Sept. 1909 und für die vom 26. August 1916 die Beträge $\varDelta H$ nach Ablauf der Hauptschwingung für gleiche Zeiten rür alle betreffenden Stationen bestimmt und gruppenweise zusammengefaßt. $\varDelta H$ zeigte dann eine schnellere Abnahme mit abnehmendem Polabstand als $\sin u$ entspricht. Der Wert am Äquator ist am 25. IX. 1909 gleich $-350\,\gamma$. Zum Vergleich sind die Werte für $-350\,\gamma \sin u$ beigefügt.

Nachstörungswert 25. Sept. 1909 Mn. Gr.-Zt.

Anzahl der Stationen	Mittel u	Mittel $\varDelta H$	$-350\,\gamma \sin u$
1	90^0	$-350\,\gamma$	$-350\,\gamma$
5	67	-298	-320
5	42	-163	-225
4	33	-149	-190
=	26. Aug. 1916; 6^h Gr.-Zt.		
4	70^0	$-159\,\gamma$	
4	46	-100	

Am 25. September 1909 ist das Verhältnis von $\varDelta H$ für 67^0 Polabstand zu $\varDelta H$ für 33^0 gleich 2, während $\frac{\sin 67^0}{\sin 33^0} = 1.7$. Am 26. August 1916 ist

$$\frac{\varDelta H_{70^0}}{\varDelta H_{46^0}} = 1.56 \text{ während } \frac{\sin 70^0}{\sin 46^0} = 1.3.$$

Für die Vertikalkomponente ist der Betrag der Nachstörung unsicherer als für H; doch läßt sich erkennen, daß der Betrag von

$\varDelta Z$ mit wachsendem Polabstand abnimmt. Für nördliche Stationen ist $\varDelta Z$ positiv; für südliche (Samoa, Batavia, Mauritius) negativ. Das zeigt sich auch bei anderen Störungen, z. B. am 29. Sept. 1908 10^h Greenw.-Zt., wo $\varDelta H$ für Samoa -120γ, für Honolulu -120γ beträgt; und $\varDelta Z$ für Samoa -6γ, für Honolulu $+16\gamma$. In allen Fällen ist $\varDelta Z$ im Verhältnis zu $\varDelta H$ überraschend klein.

Nachstörungswerte in γ.

Greenwich-Zeit		25. IX. 1909. 24^h		27. VIII. 1916. 6^h-7^h	27. VIII. 1916. 14^h-15^h	
	Polabstand	$\varDelta H$	$\varDelta Z$	$\varDelta H$	$\varDelta H$	$\varDelta Z$
Kodaikanal	90°	— 350	+ 50	—	—	—
Samoa	73	— 320	?	— 164	— 80	— 16
Batavia	70	—	— 38	— 140	— 65	— 5
Lukiapang	70	— 260	+ 75	— 160	— 108	+ 24
Honolulu	69	— 300	+ 30	— 173	— 85	+ 14
Mauritius	62	— 320	— 28	—	—	—
Porto Rico	60	— 290	—	— 116	— 75	+ 20
Tuscon	49	—	—	— 118	— 75	+ 23
S. Fernando	48	— 140	—	—	—	—
Pola	41	— 170	+ 70	—	—	—
Baldwin	40	— 200	+ 20	—	—	—
Cheltenham	40	—	+ 20	— 90	— 45	+ 14
München	39	— 155	—	—	—	—
Jekaterinburg	39	— 150	+ 80	—	—	—
Potsdam	37	—	—	— 80	— 40	+ 25
Toronto	34	— 160	—	—	—	—
Greenwich	33	— 125	+ 100	—	—	—
Falmouth	33	— 175	+ 60	—	—	—
Stonyhurst	33	— 135	—	—	—	—

b) Abhängigkeit der Differenzen der Tagesmittel an allen und ruhigen Tagen von der Poldistanz.

Die Stundenmittel enthalten nach den früheren Bezeichnungen folgende Anteile

$$h = n + T + a + t + \varDelta.$$

Die Differenzen der Stundenmittel an allen und ruhigen Tagen $\varDelta h$ enthalten, wenn die Indizes a für alle, die Indizes r für ruhige Tage gelten,

$$\varDelta h = a_a - a_r + t_a - t_r.$$

Aus den Differenzkurven Kap. I ergab sich für die drei tropischen Stationen als Mittelwert für $a_a - a_r = \Delta a$ und als Amplitude des täglichen Ganges von $t_a - t = \Delta t$:

$$\Delta t = 6\tfrac{1}{2}\gamma; \; \Delta a = 6\gamma.$$

Aus der Analyse der Störungen in Samoa (Kap. I) ergab sich für die Amplitude des ortszeitlichen Störungsverlaufes t und für den allgemeinen Störungsverlauf a im Mittel des ersten und zweiten Störungstages

$$t = 39\gamma: \; a = 42\gamma.$$

Es ist also annähernd

$$\frac{\Delta t}{\Delta a} = \frac{t}{a} = 1.$$

Δa und a sind im wesentlichen die mittleren Beträge der Nachstörung für den betrachteten Zeitraum bezogen auf die zugehörigen Niveaus. a ist bezogen auf den ungestörten Wert vor Beginn der Störung. Δa ist die Niveaudifferenz zwischen dem Nachstörungswert im Mittel aller Tage und im Mittel der ruhigen Tage. Im Mittel aller Tage liegt der Nachstörungswert niedriger entsprechend der Anzahl, der Intensität und der zeitlichen Lage der Störungen im betrachteten Zeitraume gegenüber den ruhigen Tagen. Für einen einzelnen Monat wird die zufällige zeitliche Lage der Störungstage gegenüber der Lage der ruhigen Tage im betrachteten Zeitraum einen ungewollten Einfluß besitzen auf die gesuchte Niveaudifferenz. Die Nachstörungen klingen langsam ab und sind meist dann noch merklich, wenn bereits wieder eine neue Störung einsetzt; ihr jeweiliger Betrag ist daher vollständig nur darstellbar durch eine Erinnerungsfunktion, die über alle vorangegangenen Störungseinflüsse summiert. Je größer aber die betrachteten Zeiträume sind, um so mehr wird der fälschende Einfluß der zufälligen gegenseitigen Lage der ruhigen und der Störungstage zurücktreten und um so reiner wird die Differenz der Tagesmittel aller und ruhiger Tage den Nachstörungseinfluß für einen mittleren Abstand der ruhigen und gestörten Tage voneinander wiedergeben, und zwar befreit von dem im Laufe des Tages periodischen Vorgängen und gleichfalls von den säkularen Veränderungen, die in den kurzen Zwischenzeiten zwischen den ruhigen Tagen und den Störungstagen keine nennenswerte Beträge erreicht haben werden. Jahre mit gleicher Anzahl gleichstarker Störungen werden daher am selben Ort auch nahe gleiche Differenzen für die Jahresmittel aus allen und ruhigen Tagen ergeben, trotz der verschieden zeitlichen

Lage der Störungen. Sind aber Zahl und Intensität der Störungen in verschiedenen Jahren verschieden, so geben die Differenzen ein Maß für die Nachwirkung dieser Störungen in den betreffenden Jahren. Bei Verwendung bestimmter festgelegter ruhiger Tage wird die Differenz an verschiedenen Stationen (für dieselben Zeitabschnitte) vergleichbar und ein Maß für die Abhängigkeit der Störungsnachwirkung von der geographischen Lage.

Die Tabelle gibt die Differenzen der Tagesmittel an allen und ruhigen Tagen für drei Zeiträume 1905—10; 1911—14; 1915—18. Der mittlere Zeitraum umfaßt ruhige, der erste und letzte magnetische aktive Jahre. Verwendet wurden neben den Beobachtungen von Samoa, auch Honolulu, Porto Rico, Cheltenham und Sitka. Ebenso wie bei der Störung tritt hier die Abhängigkeit von der Poldistanz deutlich zu Tage in jedem der drei Zeiträume besonders für die Horizontalintensität. Wie bei den Störungen sinkt auch hier ΔH mit abnehmender Poldistanz. Falls die Abnahme von ΔH mit sinkender Poldistanz proportional $\sin u$ verläuft, muß $\frac{\Delta H}{\sin u}$ konstant sein und den Maximalwert von ΔH für den magnetischen Äquator angeben. Die Tabelle zeigt, daß dies nicht der Fall ist. In niederen Breiten sinkt ΔH etwas schneller als $\sin u$ (ebenso wie bei Störungen); in mittleren Breiten proportional mit $\sin u$.

Mittlerer Wert der Nachstörung aus der Differenz der Tagesmittel an allen und ruhigen Tagen.

		ΔH in γ				$\Delta H : \sin u$	ΔD in γ	ΔZ in γ	Azim.	Neig.
	Poldistanz	1905/10	1911/14	1915/18	1905/18	1905/18	1905/18	1905/18	1905/18	1905/18
Samoa	73°	−7.7	−3.8	−9.0	−6.8	−7.1	0.0	0.0	180°	0
Honolulu	69	−7.2	−3.7	−8.2	−6.4	−6.8	−0.5	+0.6	183	5°
Porto Rico	60	−5.9	−2.5	−7.9	−5.4	−6.2	−0.2	+0.8	182	9°
Cheltenham	40	−4.9	−2.5	−6.5	−4.6	−7.1	0.0	+0.4	178	5°
Sitka	30		−1.3	−7.2						
Mittel (außer Sitka)		−6.4	−3.1	−7.9						

Die Werte für ΔD und ΔZ sind in allen Fällen nur Bruchteile eines γ. ΔZ ist aus instrumentellen Mängeln weniger zuverläßlich bestimmbar als ΔH und ΔD. Die Richtung dieses Störungsvektors ist an allen Stationen und in allen drei Zeiträumen sehr wenig von der Richtung des magnetischen Meridians verschieden

und nur wenige Grad gegen die Horizontalebene geneigt. In der Tabelle ist das Azimut gegen den magnetischen Meridian gemessen und von N über E gezählt. Die Neigung gegen die Horizontalebene ist nach unten positiv gezählt.

c) Beziehung des Nachstörungswertes zur Charakterzahl.

Der erdmagnetische Charakter der verwendeten Jahre 1906—1918 wird durch die internationale Charakterzahl gemessen. Der Vergleich derselben mit den Differenzen ΔH zeigt im allgemeinen eine ausgesprochene Beziehung. ΔH_m bedeutet die Mittelwerte aus den vier ersten Stationen der vorigen Tabelle für jedes einzelne Jahr. n die Charakterzahl des betreffenden Jahres.

	1906	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$-\Delta H_m$	4.6	6.0	8.1	8.6	6.2	4.3	2.1	2.7	3.2	6.9	6.1	8.6	10.0
n	0.65	0.66	0.68	0.62	0.72	0.63	0.46	0.49	0.54	0.62	0.71	0.67	0.75

	1906–10	11–14	15–18
$-\Delta H_m$	6.7	3.1	7.9
n	0.67	0.53	0.69

Die Werte für ΔH_m und n sind in der obigen Tabelle in drei Jahresgruppen zusammengefaßt. Es ist ersichtlich, daß die Charakterzahlen sich erheblich langsamer ändern als die Werte von ΔH_m, etwa wie die Quadratwurzel aus ΔH_m. Die Analyse der Störungen ergab für den mittleren Betrag der Nachstörung von 12^h—36^h Störungszeit etwa $-51\,\gamma$. Die zur Ableitung dieser Werte benutzten Störungen besaßen im Mittel die Charakterzahl 1.7. Vergleicht man diesen Wert und den für ΔH, der aus den Differenzen von allen und ruhigen Tagen für Samoa gewonnen wurde, mit den zugehörigen n, so entsprechen die Charakterzahlen 1.7; 0.68; 0.53 den Werten für ΔH $-51\,\gamma$; $-8.3\,\gamma$; $-3.8\,\gamma$. Für diese Zahlen gilt in der Tat nahezu $n_1 : n_2 : n_3 = \sqrt{\Delta H_1} : \sqrt{\Delta H_2} : \sqrt{\Delta H_3}$. Setzt man die zusammengehörigen Werte für $n = 0.53$ und $\sqrt{\Delta H_1} = \sqrt{3.8}$ je für sich gleich 1, so zeigt sich, daß die obige Proportion annähernd erfüllt ist.

$$3.2 : 1.3 : 1.0 = 3.9 : 1.6 : 1.0.$$

Das heißt in erster Annäherung verhalten sich die Charakterzahlen wie die Quadratwurzeln aus den entsprechenden Nachstörungsbeträgen, gleichviel ob diese letzteren aus den Störungen selbst oder aus den Differenzen der Tagesmittel an allen und ruhigen Tagen abgeleitet sind.

Die Werte für ΔH, die aus der Differenz der Tagesmittel an allen und ruhigen Tagen gewonnen werden, zeigen von Monat zu Monat einen jahreszeitlichen Verlauf, der den jährlichen Gang der

Häufigkeit und der Intensität der Störungen entspricht und Maxima zu den Äquinoxien besitzt. Für eine südliche und eine nördliche Station niederer und nahe gleicher Breite ist hier der jährliche Gang für ΔH in γ angegeben.

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Samoa 1906/18	−3.9	−6.2	−8.8	−6 9	−7.2	−6.2	−5.3	−8.5	−9.3	−10.0	−7.5	−5.1
Porto Rico 1095/18	−3.4	−6.4	−7.4	−5.2	−5.1	−3.4	−3.6	−5.3	−7.7	− 8.1	−6.4	−4.3

d) Die Abklingungskonstante der Nachstörung.

Der zeitliche Verlauf der Nachstörung zeigt wenigstens bis zum Ausbruch einer neuen Störung eine ausgesprochene Regelmäßigkeit, die auf eine Gesetzmäßigkeit schließen läßt. Die nächstliegendste Annahme wäre eine Abklinkung proportional der jeweiligen Intensität also nach einer Exponentalfunktion von der Form

$$h = h_0 e^{-\alpha t}.$$

Es wurde versucht die besonders ungestört abklingende, aber sehr intensive Störung vom 17. Juni 1915 hierdurch darzustellen. Es wurden 24 stündige Mittelwerte zugrunde gelegt von drei tropischen Stationen Batavia, Honolulu, Porto Rico und die Halbwertszeiten

$$t' = \frac{1}{\alpha} \ln 2, \qquad \text{worin } \alpha = -\frac{1}{t} \ln \frac{h}{h_0}$$

für drei auf einander folgende Tage t'_1; t'_2; t'_3 berechnet. Die drei Werte für α und t' zeigten für jede der drei Stationen denselben Gang; im Mittel war in Tagen

$$t'_1 = 1.3; \qquad t'_2 = 1.7; \qquad t'_3 = 2.3.$$

Die Halbwertszeit zeigt sich also während des Ablaufs der Nachstörung nicht konstant. Die Nachstörung ist auf diese Weise nicht genügend darstellbar. Eine andere Darstellung führte zu besserer Übereinstimmung. Sie beruht auf folgender Überlegung: Die magnetische Störung ist höchstwahrscheinlich mit einem Ionisationsvorgang in der oberen Atmosphäre verknüpft, veranlaßt durch eine von außen eindringende ionisierende Strahlung. Mit Ablauf der Schwingung scheint das Eindringen der Strahlung (gleichzeitig mit den Polarlichtern) beendet zu sein und die Wiedervereinigung der Ionen, und damit der langsame Zerfall der elektrischen Induktionsströme beginnt. Gleichzeitig wird auch die Bewegung, die die leitende Luft gegen die Kraftlinien führte, allmählich ersterben. Beiden Vorgängen entspricht das Abklingen der Nachstörung. Die Wiedervereinigung der Ionen wird die Leittähigkeit $\lambda = \varepsilon v \, (n_+ + n_-)$

herabsetzen. Die Zahl der durch Wiedervereinigung verschwindenden Ionen ist proportional mit $n_+ n_-$. Wenn sonst alles ungeändert bliebe, Beweglichkeit der Ionen und Stärke der Luftbewegung, so könnte man den Störungsvektor h und seine Änderung, der Ionenzahl und ihrer Änderung proportional setzen. Die Zahl der vorhandenen positiven und negativen Ionen können wir hierbei wohl als gleich annehmen. Es ist dann nach Beendigung der ionisierenden Strahlung und unter Vernachlässigung der Diffusion

$$\frac{dn}{dt} = -\beta n^2$$

und somit

$$\frac{dh}{dt} = -\beta h^2.$$

Die Integration ergibt unter Berücksichtigung, daß für $t = t_0$ werden soll $h = h_0$,

$$\beta = \frac{1}{t - t_0} \frac{h_0 - h}{h_0 h},$$

$$t' = \frac{1}{\beta h_0}.$$

Die Übereinstimmung der Werte für β und t' berechnet aus verschiedenen Zeitabschnitten ist jetzt besser, wie die folgende Tabelle für dieselbe Störung vom 17. Juni 1915 für Honolulu zeigt. Die Stundenmittelwerte von 12 zu 12 Stunden sind der Veröffentlichung der Coast and Geodetic Survey U. S. A. entnommen und hier unter h angegeben. Als Beginn der Zählung ist $t_0 = 17.$ Juni 12^h Gr.-Zt. genommmen; das ist das Ende der Schwingung; h_0 zu diesem Zeitmoment $= 216\,\gamma$ ist als Betrag der Nachstörung angenommen. h_0 und h sind gemessen gegen das Monatsmittel, das nahe mit dem ungestörten Wert vor Beginn der Störung zusammenfällt. h_0 und h sind korrigiert auf den normalen täglichen Gang.

		h	β	t'
17. Juni 1915	12^h	216		
18.	0	118	0.0074	0.65
18.	12	77	80	58
19.	0	61	78	63
19.	12	53	71	65
20.	0	46	69	67
20.	12	41	66	70
21.	0	36	66	70
21.	12	32	67	69
22.	0	29	67	69
22.	12	24	74	64

Die Koeffizienten β gelten für den Zeitraum eines Tages. Die Halbwertzeiten, hier in Tagen ausgedrückt, zeigen eine recht gute Übereinstimmung; ein Beweis dafür, daß der Ablauf der Nachstörung in der Tat durch die obige Beziehung richtig dargestellt wird; daß also ein Vorgang wie die Abnahme der Leitfähigkeit der oberen Luftschichten durch Wiedervereinigung der Ionen sehr wohl den Hauptanteil liefern kann für den Zerfall der elektrischen Ströme.

Nur in den allerersten Stunden nach Ablauf der Schwingung ist der Abfall des Störungsvektors intensiver. Für die ersten Nachstörungsstunden ergibt sich ein beträchtlich höherer Wert für β. Zu dieser Zeit scheint neben der Wiedervereinigung der Ionen noch eine andere Ursache der Abnahme der Störungsintensität wirksam zu sein. Dies ist vermutlich ein starkes Nachlassen der Luftbewegung, das man in erster Annäherung wohl wie eine Dämpfung als Exponentialfunktion darstellen kann. Beide Vorgänge: das Nachlassen der Luftbewegung und die Wiedervereinigung der Ionen überlagern sich dann und wir können die dadurch verursachte Abnahme der Störungsvektoren h darstellen durch

$$\frac{dh}{dt} = -\alpha h - \beta h^2.$$

Das Integral $\int \frac{dh}{\alpha h + \beta h^2}$ läßt sich durch Einführung von $u = \frac{\alpha}{2\beta} + h$ auf die Form bringen

$$\frac{1}{\beta} \int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2}.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Lösung, wenn für $t = t_0$ werden soll $h = h_0$

$$-\alpha(t - t_0) = \ln\left(\frac{h}{h_0} \cdot \frac{h_0 + \frac{\alpha}{\beta}}{h + \frac{\alpha}{\beta}}\right).$$

Da für die Zeiten t_1, t_2 ... die Werte h_1, h_2 ... gegeben sind, so lassen sich α und β berechneu. Man wird dabei am einfachsten $\ln\left(h + \frac{\alpha}{\beta}\right)$ als eine Reihe entwickeln, die man schon nach dem zweiten Glied abbrechen kann.

Diese Darstellung des Abklingungsvorganges der Nachstörungen scheint auch für die ersten Nachstörungsstunden befriedigende Ge-

nauigkeit zu geben. Schwierig ist hier die richtige Wahl von t_0 und h_0, da vor t_0 noch Vorgänge herrschen, die nach anderen Gesetzen ablaufen (die Schwingung). Entfernt man sich andererseits vom Ende der Schwingung und setzt t_0 erst ein paar Stunden später an, wo die Schwingung sicher beendet ist, so genügt der frühere Ansatz: $\frac{dh}{dt} = -\beta h^2$. Es müssen hier Störungen verwendet werden, die ein scharf begrenztes Ende der Schwingung zeigen. Die Untersuchungen hierüber sind noch nicht abgeschlossen.

An der Störung vom 26. Aug. 1916 ließ sich wie oben gezeigt wurde, verfolgen, daß die Intensität der Nachstörung von der Poldistanz abhängt. Auch die Abklingungskonstante erweist sich davon abhängig.

Die Halbwertzeit $t' = \frac{1}{\beta h_0}$ wurde berechnet nach dem Ansatz, den wir auf Grund der Annahme machten, daß die Abklingung in erster Linie durch die Wiedervereinigung der Ionen bedingt sei. Es ergaben sich für die bei den Stationsgruppen von 70° und 46° aus dem Betrag der Nachstörung um 6^h und 14^h Greenw.-Zt. die folgenden Werte:

Mittlerer Polabstand	h_6	h_{14}	β	t'
70°	159	84	0.018	0.36
46°	100	59	0.021	0.48

Die Stationsgruppe mit dem kleineren Polabstand zeigt ein verhältnismäßig langsames Abklingen, eine größere Halbwertzeit. Falls durch β die Wiedervereinigung der Ionen gemessen wird, so würde bei gleichem Anfangswert h_0 ein größeres β bedeuten, daß die Wiedervereinigung sich am Orte A des größeren β schneller vollzieht; das würde auf einen Unterschied des Druckes und der Temperatur am Orte A gegenüber einem andern Orte von geringerem β deuten. Das Stromsystem müßte sich im Orte A folglich in einer anderen Höhenlage befinden.

Die Laboratoriumserfahrungen über die Abhängigkeit des Koeffizienten der Wiedervereinigung von Temperatur und Druck sind sehr unvollkommen. Immerhin scheint eine Temperaturabnahme von 300° auf 200° (absolut) einer Zunahme des Koeffizienten von rund 100 % zu entsprechen. Abnehmendem Druck soll eine Abnahme des Koeffizienten entsprechen, doch wie es scheint langsamer als bei voller Proportionalität. Der Mittelwert aus den

vorliegenden Messungen in Luft ergibt für den Koeffizienten der Wiedervereinigung 1.6×10^{-6}. Der Wert für β berechnet aus der Störung vom 17. Juni 1915 beträgt auf die Zeiteinheit bezogen 8×10^{-8} und für die Störung vom 26. Aug. 1915 2×10^{-7}. Falls β wirklich die Wiedervereinigung mißt und die Abhängigkeit der Koeffizienten vom Druck und Temperatur bekannt wären, ließen sich aus β die Höhenlage der Stromsysteme berechnen. Die vorliegenden Laboratoriumserfahrungen über die Größe des Koeffizienten der Wiedervereinigung als Funktion von Druck und Temperatur lassen sich mit unseren bisherigen Schätzungen der Höhenlage der Stromsysteme (Höhe des Polarlichtes) wohl noch vereinigen. Unterschiede in der Größe von β für verschiedene Störungen würden auf eine verschiedene Höhenlage der entsprechenden Stromsysteme während der betreffenden Störung deuten.

III.

Die Störungsvektoren und die elektrischen Ströme.

Die bisherige Analyse der magnetischen Störungen führte zu einer zweifachen Einteilung:

Einmal ergab die Mittelbildung über die Störungen in Samoa ein allgemeines und ein ortszeitliches Störungssystem. Das erste zerfiel in Vor-, Haupt- und Nachstörung, ohne dabei die letzten beiden scharf gegeneinander abzugrenzen. Das ortszeitliche Störungssystem gab die mittlere Abhängigkeit der gesamten Störung von der Tageszeit. Die Abhängigkeit für die einzelnen Phasen war dadurch noch nicht gegeben. Es war eine erste Orientierung.

Die Verfolgung einiger besonders einfach gebauter Störungen von Station zu Station in mittleren und niederen Breiten, wo die Einflüsse der weniger übersichtlichen Störungssysteme hoher Breiten noch zurücktreten, gab dann eine eingehendere Vorstellung von dem relativ einfachen Störungsablauf in den polfernen Zonen. Hier ließ sich ein Impetus, eine Schwingung und eine Nachstörung unterscheiden. Das Ende der Schwingung ließ sich durch einen scharf definierten Knick in H zeitlich abgrenzen. Ihre Dauer konnte festgestellt werden. Die Nachstörung, die wahrscheinlich schon vor Ablauf der Schwingung vorhanden ist, konnte nach Ablauf der Schwingung, also von der Überlagerung der Schwingung frei, auf ihr Abklingungsgesetz untersucht werden. Der Impetus und die Schwingung zeigten je eine besondere ausgesprochene Abhängigkeit von der geographischen Länge; die Schwingung und die Nachstörung von der Poldistanz.

Die Differenz der Stundenmittel an allen und ruhigen Tagen zeigt einen Verlauf, der dem ortszeitlichen Störungsgang bis auf die naturgemäß verminderte Amplitude voll entspricht, und deshalb als eine wertvolle Bestätigung und Ergänzung der Ergebnisse angesehen werden kann, die aus der Analyse der Störungen gewonnen sind. Die Differenz der Monats- und Jahresmittel, aus allen und ruhigen Tagen berechnet, gibt ein entsprechendes Maß für den mittleren Betrag der Nachstörung im betrachteten Zeitraum, mit dem sich die Abhängigkeit der Nachstörung von der Poldistanz und ihre Beziehung zur magnetischen Aktivität, gemessen an der Charakterzahl, verfolgen läßt.

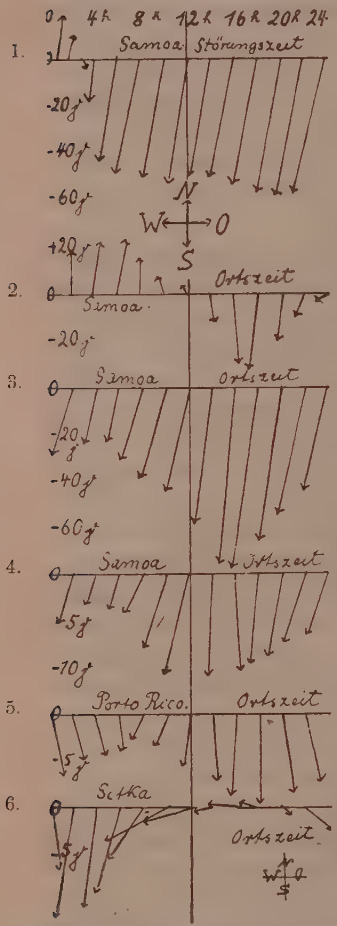
Die Schwingung, oft von der Dauer eines halben oder viertel Tages, zeigt eine Abhängigkeit von der Länge und Breite, durch die sich die Gestalt dieses Störungssystems offenbart. Für die Abgrenzung dieses Störungssystems ist die Vertikalkomponente von besonderer Bedeutung. Hier trifft die Analyse auf erhebliche Schwierigkeiten, die einmal in der geringen Größe von ΔZ und der verhältnismäßig großen Unsicherheit der Angaben der magnetischen Wage begründet sind. Andererseits ist schon in mittleren Breiten die Schwingung von Fernwirkungen lokaler Stromwirbel hoher Breiten überlagert, die sich oftmals gerade in Z überraschend stark — im Verhältnis zum ΔZ der Schwingung — geltend machen, und den einfacher gebauten Schwingungsvorgang verdecken. Dieser Umstand macht es notwendig bei einer Abgrenzung des Störungssystems der Schwingung polwärts auch die gleichzeitigen genetisch mit ihr verknüpften polaren Störungssysteme mit zu berücksichtigen, wodurch die Aufgabe bedeutend erweitert und erschwert wird. Diese Untersuchungen sind bisher noch nicht zu einem befriedigenden Abschluß gekommen.

Um eine übersichtlichere Darstellung der bisher gewonnenen Resultate zu geben, wurden die Störungsvektoren berechnet und als Funktion der Störungszeit, Ortszeit oder Länge eingezeichnet. Die Störungsvektoren in der Horizontalebene ergeben sich durch Rechnung aus den Registrierungen von H, D und Z je nachdem man sie auf den magnetischen oder geographischen Meridian bezieht zu ΔH, ΔD, ΔZ oder ΔX, ΔY, ΔZ;

dabei ist
$$\Delta X = \Delta H \cos D - \Delta D \sin D,$$
$$\Delta Y = \Delta H \sin D + \Delta D \cos D,$$
$$\Delta D = 10^5 HD\, \Delta' \operatorname{arc} 1',$$
wenn ΔD in γ und ΔD in Bogenminuten gemessen wird.

Es ist hier die Winkelvariation von D ausgedrückt durch diejenigen Komponenten der Störungskraft, die senkrecht zur Haupt-

kraft die Winkelvariation erzeugt hat. Das Azimut α und die Neigung i der Vektoren bezogen auf den magnetischen Meridian und die Horizontalebene ist gegeben durch



Figur 6. Störungsvektoren in der Horizontalebene: 1) allgemeiner, 2) ortszeitlicher, 3) allgemeiner + ortszeitlicher Störungsverlauf aus Störungen für Samoa, 4) 5) 6) dasselbe wie 3) aus Differenzen an allen und ruhigen Tagen für Samoa, Porto Rico und Sitka.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta D}{\Delta H}; \quad \operatorname{tg} i = \frac{\Delta Z}{\sqrt{\Delta D^2 + \Delta H^2}}$$

bezogen auf den astronom. Meridian

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\Delta Y}{\Delta X}; \quad \operatorname{tg} i' = \frac{\Delta Z}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} = \operatorname{tg} i.$$

Fig. 6, 1) zeigt zunächst den allgemeinen Störungsverlauf in Samoa abgeleitet aus der Analyse der großen Störungen. Die horizontalen Störungsvektoren sind als Funktion der Störungszeit eingetragen. Sie liegen durchweg im magnetischen Meridian. Während der Vorphase ($0^h - 2^h$ Störungszeit) sind sie nach magnetisch Nord, dann mit plötzlichem Übergange nach magnetisch Süd gerichtet. In dieser Richtung verbleiben die Vektoren während der Hauptphase und Nachstörung. Nur ein sehr geringes Pendeln um diese Richtung erfolgt in etwa 8 stündiger Periode. Der Verlauf der Vertikalkomponente in Samoa zeigt eine etwas weiter gehende Gliederung: Während der Vorphase sind die nördlichen Störungsvektoren im Mittel aufwärts gerichtet. In den ersten 10^h der Hauptphase — etwa so lange, wie im Mittel die Hauptschwingung andauert — sind die südlichen Vektoren im Mittel um etwa 5^0 abwärts gerichtet. Von dieser Zeit an, — also während der Nachstörung — weisen sie im Mittel um etwa 6^0 aufwärts. (Siehe auch Taf. I. Störung vom 11. VIII. 1919.)

Fig. 6, 2) zeigt den ortszeitlichen Störungsverlauf, aus Störungen berechnet. Die horizontalen Vektoren weisen von Mitternacht bis Mittag nördlich, von Mittag bis Mitternacht südlich. Addiert man den mittleren Wert der Vektoren der Hauptphase des allgemeinen zu den Vektoren

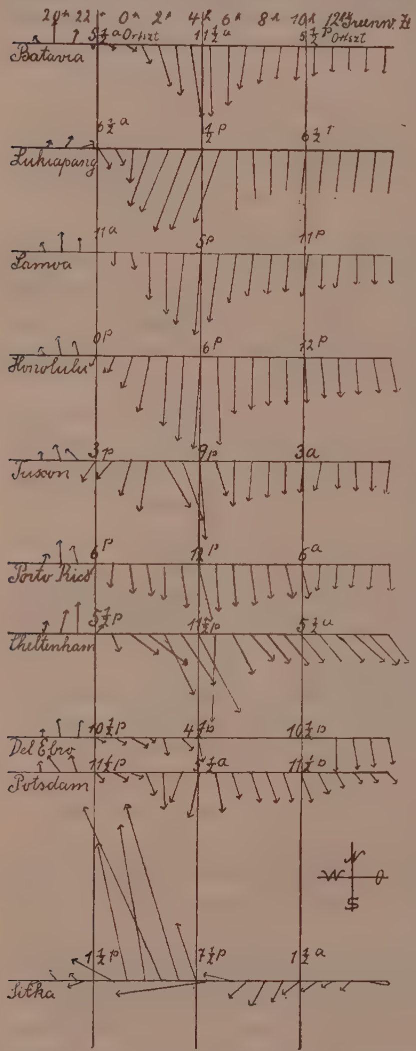
des ortszeitlichen Störungsverlaufes, so ergibt sich (Fig. 6. 3), daß die Vektoren im Laufe des Tages nur sehr wenig von der magnetischen Südrichtung abweichen, aber sehr in ihrer Länge schwanken; an der Morgenseite beträgt ihre Länge nur $^1/_3$ ihrer Länge an der Abendseite.

Fig. 6. 4) und 5) zeigt die Differenz des täglichen Ganges an allen und ruhigen Tagen als horizontale Vektoren nach Ortszeit für Samoa und Porto Rico. Es wird hierdurch der ortszeitliche Gang eines mittleren Störungsvektors dargestellt, der für mittlere und niedere Breiten wohl hauptsächlich den Betrag des mittleren Nachstörungsvektors enthält. Die Vektoren verlaufen im ganzen genommen ähnlich wie die aus der Analyse der Störungen berechneten und in Fig. 6. 3) dargestellten. Das ΔZ aus allen und ruhigen Tagen zeigt, daß an den nördlichen Stationen Honolulu und Porto Rico die südlich gerichteten Vektoren ein wenig, — im Mittel um 3° und 10° — abwärts weisen; das gilt vor allem für den Nachstörungsvektor. Auf der südlichen Station Samoa ist das entsprechende ΔZ wenig von Null verschieden. Das ΔZ des Nachstörungsvektors für Samoa aus Störungen berechnet, zeigt aber wie schon angeführt, daß die Nachstörungsvektoren in Samoa im Mittel um 6° aufwärts weisen. In niederen Breiten zeigt also der Nachstörungsvektor nördlich vom Äquator abwärts, südlich vom Äquator aufwärts. Dasselbe Gesetz ergibt sich aus den Nachstörungswerten für ΔZ bei den Störungen vom 25. IX. 1909 und 26. VIII. 1916. (Siehe Tabelle Seite 22.) In allen Fällen ist aber dieser Neigungswinkel erheblich kleiner als die Neigung der Parallelen zur magnetischen Axe der Erde im betreffenden Ort.

Für Sitka (Poldistanz 30°) liegen die Störungsvektoren berechnet aus allen und ruhigen Tagen keineswegs im magnetischen Meridian, auch nicht zur Nachtzeit. Um Mitternacht sind sie nahe nach geographisch Süd gerichtet, am Abend und Morgen konvergieren sie dahin. Am Mittag und Nachmittag sind sie fast rein westlich gerichtet. Die Vertikalkomponente zeigt, daß die Vektoren am Vormittag stark aufwärts, am Nachmittag geringer abwärts gerichtet sind; im Mittel ergibt sich eine geringe Aufwärts-Neigung.

Der ortszeitliche Gang der Vorphase (Fig. 4) ergab sich aus dem Vergleich verschiedener Stationen. Die Vektoren der Anfangsphase der Störung vom 25. Sept. 1909 wurden aus den Angaben der 21 Stationen und noch übersichtlicher aus den daraus abgeleiteten Kurven für ΔH und ΔD als Funktion der geogra-

phischen Länge abgeleitet. Diese Kurven gelten für niedere und mittlere nördliche Breite. Die Vektoren sind dort an der Mitternachtsseite nach magnetisch Nord gerichtet. Am Vormittag drehen sie nach West und um Mittag durch Süden nach Osten und abends nach Norden zurück. Die Vektoren des normalen täglichen Ganges in den Tropen verhalten sich genau umgekehrt. Sie weisen um Mitternacht nach magnetisch Süd, um Mittag nach Nord und drehen (auf der Nordhalbkugel) am Vormittag über E, am Nachmittag über W. In beiden Fällen, sowohl bei der Anfangsphase der Störung, wie beim normalen täglichen Gang sind die Vektoren um Mittag größer wie um Mitternacht. Die Vektoren der Störung vom 25. Sept. 1909 sind rund 20 mal so groß wie die des täglichen Ganges. Die Vertikalkomponente läßt erkennen, daß die Vektoren vormittags aufwärts, nachmittags abwärts gerichtet sind.



Figur 7. Störung vom 26. Aug. 1916. Störungsvektoren in der Horizontalebene. Greenwich-Zeit und Ortszeit. 1 cm = 200 γ.

Die Störung vom 26. Aug. Die Schwingung (Fig. 7) tritt in den Vektoren der Stationen niederer und mittlerer Breite gleichsinnig und nahezu gleichzeitig zu Tage. Für Potsdam und Batavia wurden die Vektoren auf den geographischen Meridian bezogen (ΔX, ΔY), für die übrigen auf den magnetischen Meridian (ΔH, ΔD). Diese kleine Unstimmigkeit hat nur geringen Einfluß, da D in Potsdam und Batavia (7° und 1°) nur gering ist. Die Störungsvektoren wurden aus den Stundenmitteln gebildet und für 21 aufeinander-

folgende Stunden eingezeichnet. Für Batavia mußten Augenblickswerte zur vollen Stunde genommen werden. Drei Phasen sind an allen Stationen leicht erkennbar und verlaufen an allen Stationen gleichsinnig.

Während der positiven Phase der Schwingung zeigen die Vektoren nordwärts, während der negativen Phase südwärts und während der Nachstörung gleichfalls südwärts, nur an den Stationen höchster Breite, in Potsdam und Cheltenham südostwärts. An allen Stationen ist der Anfang gleichzeitig; auch die Umkehr der Vektoren beim Übergang von der positiven zur negativen Phase tritt gleichzeitig ein, gleichfalls das Maximum der Intensität der südwärts gerichteten Vektoren, soweit dies aus Stundenmitteln zu ersehen ist. Zwischen 6^h und 8^h Greenwich-Zeit tritt eine plötzliche Verlangsamung in der Erholung der H-Werte ein, die ja auch besonders in den H-Kurven, aber auch hier noch in den Vektoren zu Tage tritt. Hier endet die Schwingung. Der Rest der Störung, die Nachstörung besteht in einer langsam fortschreitenden Annäherung an den Normalzustand, der erst in drei oder mehr Tagen erreicht wird. Während dieser Erholungsphase sind die Vektoren in ihrer Richtung wenig veränderlich.

Die Schwingung ist am stärksten entwickelt an der Abendseite. Beim Übergang von der positiven zur negativen Phase treten besonders in mittleren Breiten Vektoren senkrecht zum Meridian auf, vor allem zur Nachtzeit. Der erste Einsatz der Störung ist an Tagseite schwächer. In hohen magnetischen Breiten, Sitka, verlaufen die Vektoren wesentlich anders. Der Impetus ist südwestlich; statt der südlichen treten hier starke, nördliche Vektoren auf. Die Nachstörung zeigt geringe südwestliche Vektoren.

2. Die elektrischen Ströme.

Die Vor- und Hauptstörung. Schwingung. Der Schwingung entspricht ein Stromsystem, daß wie die Vektoren zeigen im wesentlichen senkrecht zu den magnetischen Meridianen fließt. Die hier in Betracht kommenden Beträge von ΔZ sind sehr gering, und an manchen Stationen unsicher. Sie zeigen nicht das gleichmäßige Verhalten von Station zu Station, das ΔH auszeichnet. Im ganzen deutet ΔZ an, daß das Stromsystem hauptsächlich in der Atmosphäre gelegen ist. Während des positiven Anstiegs von ΔH (Vorstörung) fließt der Strom ostwärts, während des negativen Abstiegs von ΔH (Hauptstörung) westwärts. Die im Erdboden vom atmosphärischen Stromsystem induzierten Ströme verstärken ΔH und schwächen ΔZ.

Diese Wirkung scheint auf Ozeaninseln, so in Samoa, wegen der großen Leitfähigkeit des umgebenden tiefen Meeres stärker zu sein wie auf Binnenlandstationen, sodaß auf den Ozeaninseln das sekundäre induzierte System zeitweilig, besonders bei heftigen Bewegungen, überwiegt. Die Änderungsgeschwindigkeit der induzierenden Ströme ist hierbei von entscheidender Bedeutung.

Die Stromflächen des atmosphärischen Stromsystems verlaufen nahe parallel zur Erdoberfläche. An der Abendseite der Erde ist das Stromsystem stärker entwickelt als an der Morgenseite. Die Stromlinien liegen an der Abendseite dichter.

Die Nachstörung. Das Stromsystem, das diesem Störungsvektor entspricht, ist in mittleren und niederen Breiten einfach gebaut. Die Werte für ΔZ zeigen nördlich und südlich vom Äquator eine Zunahme der numerischen Werte von Z, während ΔH überall negativ ist. Das Stromsystem liegt außerhalb und fließt westwärts. Es ist am Äquator am stärksten ausgebildet und nimmt polwärts an Intensität ab.

In höheren Breiten liegen die Verhältnisse weniger einfach; dort treten wesentliche ost- und westwärts gerichtete Störungsvektoren zu den meridional gerichteten Vektoren hinzu, die besonders zur Zeit des Überganges von der Vorphase zur Hauptphase hervortreten zu der Zeit, wo die meridionalen Komponente null werden. Die Ströme sind dort nicht mehr senkrecht zu den magnetischen Meridianen.

Das Stromsystem, das dem Impetus entspricht, ist bei mäßigen Störungen dem nordwärts gerichteten Vektor entsprechend ostwärts gerichtet, bei sehr starken Störungen jedoch nur an der Nachtseite ostwärts, dagegen an der Tagseite westwärts. Der großen Änderungsgeschwindigkeit entsprechend ist die Induktion im Erdboden hier besonders stark.

3. Die Ursachen der elektrischen Ströme.

Das Stromsystem der Hauptschwingung ist charakterisiert durch die plötzliche Umkehr der Bewegung, die erst ost-, dann westwärts senkrecht zu den magnetischen Meridianen erfolgt, ferner durch die Gleichzeitigkeit der Phasen an verschiedenen Orten und durch die Abhängigkeit der Stromdichte von der Länge. Man kann den normalen täglichen Gang durch die Wirkung von Induktionsströmen erklären, die durch periodische horizontale Beregnung leitender Luftmassen gegen die vertikale Komponente des Erdfeldes erzeugt werden. Nimmt man an, daß die Störungen gleichfalls die Wirkungen von Induktionsströmen sind, so ent-

sprechen den meridionalen Vektoren der positiven Phase in H (el. Strom ostwärts) ein Äquatorwärts-Strömen der Luft gegen die vertikale Komponente, oder ein Abwärts-Strömen gegen die horizontale Komponente; bei der negativen Phase in H (el. Strom westwärts) ein Polwärts- oder Aufwärts-Strömen. Die Vektoren senkrecht zum Meridian, verlangen ein Strömen der Luft senkrecht zu den Meridianen, wobei die Vertikalkomponente induzierend wirkt.

Die Störungsvektoren senkrecht zu den Meridianen treten besonders in hohen Breiten hervor. Dort werden also horizontale Luftströmungen vorhanden sein. Besonders auch in den magnetischen Bewegungen, die eine Phasenverschiebung von Ort zu Ort zeigen. In niederen Breiten herrschen während der Hauptschwingung die meridionalen Störungsvektoren vor, deren Änderung in den niederen Breiten gleichzeitig und gleichsinnig erfolgen. Dies wird sich am ungezwungensten durch eine an allen Orten gleichzeitig einsetzende Vertikalbewegung der leitenden Luft gegen die horizontale Komponente des permanenten Magnetfeldes der Erde erklären lassen, die erst abwärts, dann aufwärts erfolgt. Die relativ starke Entwicklung der Störung in niederen Breiten erklärt sich dann aus dem Maximum der induzierenden Horizontalintensität im Äquator. Das plötzliche und gleichzeitige Einsetzen und Enden der Haupsschwingung an allen Stationen niederer und mittlerer Breiten läßt vermuten, daß die Vertikalbewegung eng mit dem Eindringen der Ladungen in die Atmosphäre verknüpft ist, und so lange andauert wie das Eindringen selbst. Bei der großen Störung vom 25. Sept. 1909 dauerte die Hauptschwingung in niederen und mittleren magnetischen Breiten etwa $8^1/_2{}^h$, das ist bis $20^1/_2{}^h$ Greenwich-Zeit. In Toronto, in der Nähe des Magnetpols, bis 22^h Greenwich-Zeit. Während dieser ganzen Zeit wurden in allen Breiten Polarlichter in größter Stärke beobachtet, die jedoch nach 21^h Greenwich an Stärke nachließen und endeten. Nach 23^h Greenwich-Zeit liegt keine Beobachtung des Polarlichtes mehr vor. auch nicht an Orten, die gerade Abend hatten und wo Beobachter, durch die Störung aufmerksam gemacht, dort (Canada) Polarlicht erwarteten.

Das Eindringen der Strahlen findet nach der Störmerschen Rechnung, den Birkelandschen Versuchen und nach den Beobachtungen an Polarlichtern am stärksten an der Abendseite der Erde und in den Polarlichtzonen statt. Dort sind also die heftigsten Luftbewegungen zu erwarten. Unsere Beobachtungsergebnisse finden ausreichende Erklärung, wenn wir annehmen, daß durch die eindringende Strahlung eine starke Ionisation der oberen Atmosphäre

hervorgerufen wird; am stärksten an der Abendseite; und ferner, daß die stark ionisierte obere Atmosphäre durch die eindringende Strahlung erst abwärts gerissen wird, etwa wie beim elektrischen Wind und nachher, durch elektrostatische Abstoßung der eingedrungenen Ladung, ausgedehnt und damit aufwärts bewegt wird, also eine Vertikalschwingung vollführt. Ein erneuertes stärkeres Eindringen ergibt immer wieder erst eine erneute Abwärtsbewegung ($+\Delta H$) und dann Aufwärtsbewegung ($-\Delta H$), eine neue Vertikalschwingung überlagert über die schon bestehende Bewegung. Die Polarlichterscheinungen lehren uns, daß ein lebhafter Wechsel in der Intensität der Einstrahlung vorhanden ist. Dasselbe lehren die Störungskurven, wenn sie in der obigen Weise ausgelegt werden. Die Dauer der Schwingung ist gleich der Dauer der Einstrahlung, also gleich der Zeit, während der sich die Erde in der elektrischen Strahlung der Sonne befindet. Nach Eindringen der Ladung setzt die elektrostatische Abstoßung sofort ein; die daraus erfolgende Aufwärtsbewegung wird aber erst nach einiger Zeit so stark, daß sie die durch das Eindringen veranlaßte Abwärtsbewegung überwiegt. Das gibt sich in der magnetischen Störung zu erkennen durch den Übergang von $+\Delta H$ zu $-\Delta H$. Die elektrostatische Abstoßung und damit die aufwärtstreibende Kraft ist wegen der bald erfolgten gleichmäßigen Verteilung der Ladung auf der ganzen Erde gleich stark. Die Einstrahlung und damit die Ionisation und die Abwärtsbewegung ist aber an der Abendseite am stärksten. Dort wird also die Vorphase am stärksten magnetisch wirksam sein, an der Mittagsseite am schwächsten. Das oftmals, besonders an der Abendseite plötzliche Ende der Hauptschwingung ist durch das Ende der Einstrahlung veranlaßt. Dies plötzliche Ende der Ionisierung muß sich natürlich an der Abendseite am stärksten ausprägen. Im ganzen wird die Entwicklung der Hauptschwingung wegen der starken Ionisation an der Abendseite am stärksten sein.

Die Amplitude der Hauptschwingung zeigt nur eine geringe Abhängigkeit von der Breite. Die Wirkung der stärkeren Ionisation in höheren Breiten wird kompensiert durch den größeren Wert der induzierenden Horizontalintensität in niederen Breiten. Bei horizontaler Luftbewegung würde auch die Induktion durch Z in höheren Breiten stärker sein. Es müßte dann eine starke Abhängigkeit von der Breite hervortreten.

Der Impetus ist in dieser Anschauung des Störungsvorganges der plötzliche Anfang des Eindringens der Strahlung. Wie ein von der Sonne kommendes rotierendes Scheinwerferlicht oder ein Wasserstrahl aus bewegtem Schlauch fährt die eindringende Strah-

lung von der Abendseite herkommend über die Erde, in deren Magnetfeld sie sich in der besonderen Weise anordnet. Dieser Strahl ist an der Vorderseite scharf begrenzt, wie die Heftigkeit des Impetus lehrt. Bei sehr starken Störungen ist der Impetus an der Mittagsseite negativ; hier ist die Einstrahlung und damit die Ionisation und Abwärtsbewegung relativ schwach, die elektrostatische Abstoßung aber gleich vorhanden und bei starker Aufladung überwiegend, wenigstens für eine kurze Zeit.

Eine quantitative Nachprüfung des Versuches die Vertikalbewegung der Luft durch das Eindringen und die elektrostatische Abstoßung von Ladungen zu erklären, — ein Versuch, der zuerst von Chapman angestellt wurde — führt zu mancherlei physikalischen Bedenken. Die auch deshalb hier unternommenen Untersuchungen über das Verhalten der Vektoren während der hier beschriebenen Störungsvorgänge macht jedoch, und das soll hier besonders betont werden, eine allgemeine Vertikalbewegung durchaus wahrscheinlich, wobei auch Horizontalbewegungen auftreten werden. Zum Beginn einer besonderen Störungsart der positiven Bais treten Pulsationen auf, die mit einem nordwärts gerichteten Störungsvektor beginnen und im wesentlichen als meridionale Schwingungen dieses Vektors verlaufen; sie besitzen eine ausgesprochene Periode von 90 sec, sie sind am stärksten entwickelt an der Abendseite. Gleichzeitig beginnen an der Mittagseite der Erde negative Bais mit einem südwärts gerichteten Vektor der Pulsation. Es liegt nahe, anzunehmen, daß diese Pulsationen durch die Druckwirkung gleichzeitig auf der ganzen Erde eindringender Ladungen hervorgerufen wurden und vertikale stehende Luftschwingungen sind. Es entspricht hierbei, — wie beim Impetus, — an der Nachtseite der positiven Bai und Pulsation eine Abwärtsbewegung, an der Tagseite der negativen Bai und Pulsation eine Aufwärtsbewegung. Experimentell wurde von mir durch eine gleichzeitige Feinregistrierung des Luftdrucks und der erdmagnetischen Kraft versucht, solche Druckschwingungen gleichzeitig mit magnetischen Pulsationen nachzuweisen. Die Induktionswirkung solcher Luftschwingung entspricht dem beobachteten Störungsvektor der Pulsationen. Es gelang mir jedoch nicht den Nachweis zu erbringen. Die Druckschwingungen müssen nach diesen Beobachtungen am Boden geringer als $^1/_{100}$ mm sein. Über diese Störungsart wird im II. Teil dieser Arbeit eingehender berichtet.

Die Nachstörung. Zur Erklärung der Nachstörungen lassen sich zwei verschiedene Vorgänge heranziehen. Erstens kann der Abklingungsvorgang dadurch zustande kommen, daß die durch das Eindringen elektrischer Ladung und ihre elektrostatische Abstoßung

erzeugte Aufwärtsbewegung nach Ende der Einstrahlung langsam erstirbt und gleichzeitig, da keine neue Ionenpaare erzeugt werden, nur Wiedervereinigung der Ionen stattfindet. Die Leitfähigkeit der oberen Atmosphäre sinkt dadurch langsam herab nach dem diesem Vorgang eigenen Abklingungsgesetz, das wie die Beobachtung zeigte, für die mittleren und niederen Breiten tatsächlich vorherrscht. Zweitens kann man die Nachstörung als Wirkung des Stromringes in der Äquatorebene ansehen, dessen Möglichkeit die Rechnungen von Störmer und die Versuche von Birkeland mit einer magnetischn Erdnadel im Kathodenstrahlbündel nachgewiesen haben. Dieser Ringstrom negativer Teilchen ist in der Äquatorebene der Erde gelegen. Für mögliche Werte von H_ϱ ist er in einer gegenüber dem Erdradius großen Entfernung $= \sqrt{\frac{M}{H_\varrho}}$ gelegen. Die Bewegung der negativen Teilchen erfolgt hierbei ostwärts. Das magnetische Feld eines solchen Ringstromes beeinflußt die Bahn der eindringenden elektrischen Teilchen und zieht dadurch die Polarlichter in niedrigere Breiten herab. Die Stromstärke, die genügt, um die Polarlichtzonen dorthin zu verlagern, wo sie beobachtet werden, erzeugt an der Oberfläche der Erde magnetische Störungsvektoren von der Größe und Richtung, wie sie ungefähr in den Nachstörungen auftreten. Das Nachstörungssystem entspricht also in erster Annäherung diesem Ringstrom. Auf Grund eingehender Bearbeitung der Potsdamer Beobachtungen hat hierauf zuerst Ad. Schmidt hingewiesen. Das magnetische Feld des weit entfernten Ringstromes, den man sich wegen der großen elektrostatischen Abstoßung der ihn bildenden Teilchen breit und flach vorstellen muß, ist im Ort der Erde wohl als homogen anzusehen. Es wird auf der Oberfläche der Erde eine durch die Kugelgestalt bedingte Abhängigkeit von der Poldistanz besitzen, proportional dem sinus derselben, aber wegen seiner großen Entfernung kaum eine Beziehung zur Länge oder Tageszeit erwarten lassen. Das hier untersuchte Feld nach Ablauf der Störung besitzt nun einige Eigenschaften, die sich aus der Form des Ringstromfeldes allein wohl nur schwer erklären lassen. So ist der Betrag von ΔZ zu klein im Verhältnis zu ΔH. Bei der geringen Änderungsgeschwindigkeit des Nachstörungssystems kann dies kaum durch Induktionswirkung erklärt werden. Eine erhöhte Permeabilität der Erde würde ΔZ im Verhältnis zu ΔH erhöhen. Sodann wächst ΔH nach der Beobachtung schneller als mit der Poldistanz. ΔH zeigt ferner nach der Analyse der Störungen am zweiten Störungstag noch einen deutlichen ortszeitlichen Gang, der sich erst nach wei-

teren Tagen verliert und bei dem Feld des entfernten Ringstromes nicht in dem Maße zu erwarten ist. Die Stromstärke des Ringstromes wird sich nach Aufhören der Zustrahlung allmählich durch elektrostatische Abstoßung verringern. Dieses Abklingen sollte nach einer Exponentialfunktion erfolgen, während die Beobachtung darauf hindeutet, daß noch ein anderes Abklingungsgesetz wirksam ist.

Es hat daher nach allem den Anschein, daß nach Ablauf der Schwingung neben einem entfernten Ringstromfeld noch ein weiteres näher gelegenes Feld von den angeführten Eigenschaften vorhanden sein muß, das zusammen mit dem Ringstromfeld die Nachstörung in der beobachteten Gestalt bewirken mag.

Die Tafelwerte sind in I und II für H, Z, X und Y in Gamma für D in Bogenminuten; in III für D, H, X, Y, Z in $\frac{1}{10}$ Gamma. Die Bewegung des Nordendes der Magnetnadel nach Osten und unten sind positiv gerechnet.

I. Allgemeiner Störungsverlauf in Samoa.

Störungszeit		0h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
ΔH	1. Tag	0	17	9	−3	−18	−34	−43	−44	−48	−54	−51	−53	−53	−53	−50	−51	−50	−52	−53	−54	−57	−59	−58	−59
	2. „	−58	−55	−54	−54	−52	−49	−49	−48	−45	−46	−42	−42	−42	−41	−39	−38	−37	−38	−37	−36	−37	−37	−35	−35
ΔZ	1. „	0	−3	−1	1	3	3	4	3	4	3	2	2	0	0	0	0	−1	−1	−2	−4	−4	−3	−4	−4
	2. „	−4	−4	−5	−5	−5	−6	−6	−6	−6	−6	−5	−5	−4	−3	−3	−4	−4	−4	−6	−6	−7	−7	−8	−7
ΔD	1. „	0.0	−0.1	0.0	0.2	0.2	0.1	−0.1	−0.1	−0.2	−0.1	−0.1	0.2	0.2	0.1	0.0	−0.1	−0.2	−0.2	−0.1	0.0	−0.1	−0.2	−0.3	−0.4
	2. „	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	−0.2	−0.2	−0.3	−0.3	−0.2	−0.1	−0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	−0.1	−0.2	−0.1	−0.1	−0.1	−0.1	−0.2	−0.3
ΔX	1. „	0	17	9	−3	−18	−34	−43	−44	−48	−53	−50	−52	−52	−52	−49	−50	−49	−51	−52	−53	−56	−58	−56	−57
ΔY	1. „	0	2	2	2	−1	−5	−8	−8	−10	−9	−9	−7	−8	−9	−8	−9	−10	−11	−10	−9	−10	−12	−12	−14

II. Ortszeitlicher Störungsverlauf in Samoa.

Ortszeit		0h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
ΔH	1. Tag	4	14	16	17	22	23	23	19	15	12	7	5	2	−3	−11	−21	−28	−29	−31	−24	−19	−11	−9	−2
	2. „	11	6	8	10	11	11	10	11	10	8	2	0	−4	−5	−7	−11	−11	−11	−12	−12	−11	−8	0	2
ΔZ	1. „	−1	−2	−1	0	−1	−1	−2	−1	−1	1	0	1	1	2	2	2	3	2	3	0	−2	−2	−2	−1
	2. „	−2	−2	−2	−2	−1	−1	0	0	0	−1	1	2	3	2	2	2	1	1	1	0	0	−1	−2	−2
ΔD	1. „	−0.3	−0.3	−0.3	−0.2	−0.1	0.1	0.0	−0.2	−0.3	−0.4	−0.1	0.1	−0.1	0.2	0.4	0.7	0.6	0.4	0.2	0.3	0.2	0.0	−0.3	−0.4
	2. „	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	−0.1	0.1	−0.3	−0.2	−0.2	0.0	0.4	0.2	0.0	0.2	0.2	0.4	0.4	0.3	0.1	0.2	0.0	−0.1	−0.2	−0.4
ΔX	1. „	5	14	17	17	22	23	23	19	15	13	7	5	2	−3	−12	−22	−29	−30	−31	−24	−19	−11	−9	−3
ΔY	1. „	−2	−1	0	1	3	5	4	1	0	−2	−2	2	−1	1	1	3	1	−1	−3	−1	−1	−2	−3	−4

III. Differenz der Stundenmittel an allen und ruhigen Tagen in Samoa in $\frac{1}{10}$ Gamma.

Mittel aus Februar, März, April: für D, H, X, Y, aus den Jahren 1905/18; für Z aus 1905/9, 1912.

Ortszeit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
ΔD	−13	−6	−7	−5	−3	−4	−4	−8	−11	−7	−10	−12	−8	+18	+14	+24	+19	+21	+7	+2	0	−8	−12	−12
ΔH	−63	−53	−51	−37	−31	−30	−38	−33	−43	−56	−78	−92	−105	−100	−105	−101	−98	−99	−92	−92	−85	−76	−74	−73
ΔX	−61	−52	−50	−36	−30	−29	−37	−32	−41	−55	−76	−90	−104	−103	−107	−105	−101	−103	−93	−92	−85	−75	−72	−71
ΔY	−23	−15	−15	−11	−8	−9	−10	−14	−18	−16	−23	−27	−25	+1	−4	+7	+3	+5	−8	−13	−14	−21	−24	−24
ΔZ	−11	−5	−6	0	2	6	10	17	21	8	0	−5	−7	2	5	5	1	1	−3	−2	−4	−7	−8	−8

Über Kalziumvergiftung.

Von

W. Heubner.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Januar 1924.

I.

Etwa der hundertste Teil des menschlichen Körpers besteht aus Kalzium. Von diesem Kalzium ist bei weitem die Hauptmenge in den Knochen festgelegt und zwar annähernd neun Zehntel als tertiäres Kalziumphosphat, ein Zehntel als Kalziumcarbonat; nur ein Hundertstel wiederum des gesamten Kalziumbestandes im Körper entfällt auf die weichen Gewebe.

Man weiß schon seit längerer Zeit, daß diese kleinen Kalziummengen im Blut und in den verschiedenen Organen keineswegs ohne Bedeutung sind, sondern unentbehrliche Glieder in den Mechanismen darstellen, die einen normalen Ablauf der Organfunktionen gewährleisten. Zuerst wurde es für das Herz erkannt, daß Wegnahme des Kalziums aus der Umgebungsflüssigkeit seine Tätigkeit aufhebt, mindestens sehr verschlechtert, und für mancherlei andere Organe wurde prinzipiell das Gleiche gefunden; aber ebenso ist ein Überschuß von Kalzium in der Umgebungsflüssigkeit isolierter Organe schädlich und bei hinreichendem Grade tötlich. Es ist wohl verständlich, daß auch das Blutplasma gesunder Menschen und anderer Wirbeltiere einen sehr konstanten Kalziumgehalt aufweist, der rund 11 mg Ca in 100 ccm beträgt. Diese Menge steht u. a. im Gleichgewicht mit etwa der fünffach äquivalenten Menge Bicarbonat und schätzungsweise der vierfachen Menge saurer Äquivalenzen von Eiweiß[1]); dadurch ist bedingt, daß nur ein kleiner Teil des Kalziums im Blutplasma in Form eines elektrolytisch dissoziierten Salzes, also als Ion, vorkommt, nämlich $2^1/_2$ mg %[2]).

---

1) Vgl. Gamble, Roß und Tisdall, Journal of Biochemistry **57**, 633. 1923.

2) Rona und Takahashi, Biochem. Zeitschr. **49**, 370. 1913; Brinkman und van Dam, Kon. Ak. van Wet. Amsterdam, W. en N. **28**, 417. 1920.

Vom Rest ist etwas weniger als die Hälfte an Eiweiß gebunden, so daß es nicht frei durch kolloide Membranen diffusibel ist[1])

Die Unterscheidung der drei Formen des Kalziums in der Blutflüssigkeit ist deshalb von Interesse, weil man aus guten Gründen gewohnt ist, die biologischen Wirkungen der Salze ausschließlich ihren elektrisch geladenen Komponenten, den Ionen, zuzuschreiben. Eine wichtige Frage ist es daher, ob das Verhältnis der Kalziumionen zu der Gesamtmenge des Kalziums in der Blutflüssigkeit stets das gleiche ist oder ob auch bei konstantem Gesamtkalzium die Zahl der Ionen sich ändert. Systematische Untersuchungen über diese Frage sind noch nicht ausgeführt. Theoretisch ist eine isolierte Variation der Kalziumionen möglich, weil ihre Zahl auch von der gleichzeitig vorhandenen Zahl der Bicarbonat- und der Wasserstoffionen abhängt und diese beiden Werte, wenigstens unter pathologischen Bedingungen, recht merkliche Schwankungen aufweisen können.

In den letzten Jahren vor dem Kriege hatte das Kalzium auch ein größeres therapeutisches Interesse gewonnen, nachdem man darauf aufmerksam geworden war, daß die Zufuhr von Kalziumsalzen gewisse pathologische Symptome veränderte oder beseitigte, nämlich einmal entzündliche Exsudationen auf der Haut, auf Schleim- oder serösen Häuten[2]), zweitens bestimmte Krampfzustände bei Schwangeren oder kleinen Kindern, die als Tetanie bezeichnet werden[3]). Bei dem Studium dieser therapeutischen Kalziumwirkungen an Tieren, die für ganz bestimmte, während des Krieges auftretende Heilzwecke geboten schien, wurde meine Aufmerksamkeit auf charakteristische Vergiftungserscheinungen gelenkt, die bei Anwendung höherer Dosen auftraten und bisher noch nicht beschrieben waren. Dies mag seinen Grund darin haben, daß als Versuchstiere vorwiegend Katzen dienten, an denen die Eigentümlichkeiten des Vergiftungsbildes unvergleichlich viel besser hervortreten als etwa an Kaninchen.

Die Vergiftung läßt sich bequem nur durch Einspritzung einer Kalziumsalzlösung unter die Haut oder in die Blutbahn hervor-

---

1) Rosenschein, Dissertation. Würzburg 1899; Rona und Takahashi Biochem. Zschr. **31**, 336. 1911.

2) Wright, Lancet 18. Jan. 1896. — Netter, C. r. soc. biol. **58**, I, 279. 1906. — H. H. Meyer, Münch. med. Wochenschr. **1910**, 2277. — Chiari und Januschke, Arch. f. exp. Path. u. Pharmakol. **65**, 120. 1911.

3) H. Curschmann, D. Zschr. f. Nervenheilk. **39**, 38. 1910; **45**, 405. 1912. — Erich Meyer, Therapeut. Monatshefte 1911, 411. — Blühdorn, Monatsschr. f. Kinderheilkunde **12**, Origin., 185. 1913.

rufen. Bei der letztgenannten hat man allerdings zwei Formen der Vergiftung zn unterscheiden, von denen nur die eine mit der subkutanen Vergiftung übereinstimmt. Die andere kommt offenbar durch eine unmittelbare Wirkung eines Überschusses von Kalzium auf das Herz zustande, also während oder sofort nach Ablauf der Injektion unter deutlichen Zeichen der Herzschädigung; bei Vermeidung völligen Herzstillstandes können auch bedrohliche Grade dieser Vergiftung binnen wenigen Minuten wieder überwunden werden.

Ganz anders verhält sich die allgemeine Form der Vergiftung [1]); sie nimmt gewöhnlich auch nach der Einspritzung des Kalziums ins Blut noch im Laufe mehrerer bis vieler Stunden an Schwere zu, so daß der Tod oder beginnende Erholung oft erst nach Ablauf eines halben bis ganzen Tages eintritt. Die Symptome äußern sich an der Haltung und an den Bewegungen des Tieres: schon im Stehen zeigt sich ein Taumeln und Schwanken, vor allem des Hinterkörpers, das sich beim Laufen und Springen verstärkt und häufig zu seitlichem Umfallen führt. Seltener fällt auf, daß einzelne Glieder bei Bewegungen einknicken, also offensichtlich der sogenannte „Tonus" der Muskeln vermindert ist. Bei fortschreitender Vergiftung tritt Lähmung der Muskulatur ein und zwar auffallend viel früher an den Hinterbeinen als an den vorderen und zuletzt an der Kopf- und Halsmuskulatur. Ebenso ist das Bewußtsein der Tiere, ihr Interesse an der Umgebung und ihr Bewegungswille lange erhalten. So sieht man häufig ein vergiftetes Tier auf einem Fleck des Fußbodens sitzen und sich je nach Erregung seiner Aufmerksamkeit mit den Vorderbeinen nach allen Richtungen im Kreise drehen, während der Hinterleib bewegungslos mitgeschleppt wird; und selbst ein stärker gelähmtes, auf der Seite liegendes Tier schnappt noch mit Energie und Erfolg nach einer vorgehaltenen Maus. Nicht ohne Interesse ist es auch, daß bösartige und kampfsüchtige Tiere nach Kalziuminjektionen, selbst wenn die Lähmung noch nicht stark genug ist, um sie an Bewegungen zu hindern, einen geradezu sanftmütigen Eindruck machen können — vielleicht nur infolge einer Bewegungsunlust in dem subjektiven Gefühl verminderter Leistungsfähigkeit der Muskeln.

Bei Hunden ist das Vergiftungsbild genau das gleiche wie bei Katzen. Auch die wirksamen Dosen sind ungefähr die gleichen, wenn auch nur bei Katzen umfangreichere Erfahrungen darüber gesammelt wurden. Zahlenmäßige Angaben haben nur bei intravenöser Einspritzung einen scharfen Sinn, weil die subkutane In-

---

1) Vgl. W. Heubner, Klin. Wochenschr. 1923, 1603.

jektion im Gewebe lokale Schädigungen setzt, die der Beobachtung der Allgemeinsymptome abträglich sind. Als tötliche Grenzdosis ergab sich im Mittel die Menge von 0,09 g Ca je kg Körpergewicht mit geringen Abweichungen nach oben und unten. Dies ist also ebensoviel wie der Normalgehalt weicher Gewebe an sich schon beträgt. Zwischen Kalziumchlorid und Kalziumazetat bestand kein sicherer Unterschied. Symptome der „Taumellähmung“ treten gewöhnlich bei Dosen ein, die zwei Drittel oder mehr der tötlichen Minimaldosis betragen, in einzelnen Fällen wohl auch schon bei kleineren Dosen bis herab zur Hälfte der tötlichen.

Nach dem äußeren Anschein des Vergiftungsbildes könnte man vermuten, daß eine curarinartige Lähmung der Endigungen der motorischen Nerven beteiligt sei. Deshalb wurde an Katzen geprüft, ob bei schwerer Kalziumvergiftung und bestehender Taumellähmung die Reizschwelle für die Unterschenkelmuskulatur bei faradischer Reizung des peripheren Stückes eines durchschnittenen nervus ischiadicus hinaufgesetzt sei. Dies war nicht der Fall, die Übertragung der Erregung vom Nervenstamm auf den Muskel bleibt also bei Kalziumvergiftung verschont.

Daher mußte die wesentliche Funktionsstörung bei der Vergiftung im Zentralnervensystem gesucht werden und zwar vornehmlich in den Regionen, die die Erhaltung des Muskeltonus und des Gleichgewichts beherrschen. Auf meine Bitte hat der beste Kenner dieses Gebietes der Hirnphysiologie, mein Fachkollege Rudolf Magnus in Utrecht, Herrn C. Versteegh veranlaßt, die durch Kalzium an den sogenannten „Stellreflexen“ hervorgerufenen Störungen zu studieren, um daraus eine präzisere Vorstellung über den Angriffspunkt des Giftes zu gewinnen. Nach freundlicher Mitteilung der genannten Herren ist es nicht zu bezweifeln, daß die im Mittelhirn gelegenen Zentren der Stellreflexe durch Kalzium elektiv gelähmt werden, wobei nur die Körperstellreflexe auf den Kopf eine Ausnahme machen.

II.

Die Kalziumvergiftung mußte dazu verlocken, den Beziehungen zwischen Symptomen und Schicksal des Giftes nachzugehen. Denn das Kalzium bietet gegenüber vielen anderen Giften den Vorteil der Unzerstörbarkeit im Körper und relativ bequemer Bestimmbarkeit durch chemische Analyse; die wirksamen Mengen erreichen die Größe des normalen Kalziumgehaltes sämtlicher weichen Gewebe (0,01 % des Körpergewichts), so daß man a priori mit einer Verdoppelung des Normalwertes in den Geweben rechnen

konnte. Natürlich wurde Rücksicht darauf genommen, daß Kalzium ja keineswegs nur die geschilderten schweren Symptome bewirkt, sondern in geringeren Dosen pathologische Zustände beseitigt, deren Lokalisation — wie bei exsudativer Entzündung — recht verbreitet sein kann. Im Tierexperiment läßt sich die entzündungswidrige Wirkung des Kalziums am bequemsten am Auge zeigen, das man durch Einträufelung von Senföl künstlich in einen Entzündungszustand bringt[1]); führt man dies an dem einen Auge eines Tieres vor, am anderen nach der Kalziumeinspritzung aus, so ist regelmäßig die zweite Entzündung stark abgeschwächt; die dazu nötige Dosis beträgt allerdings bei Katzen kaum weniger als ein Drittel der tötlichen.

In Zusammenarbeit mit Herrn Prof. P. Rona in Berlin, der den größten Teil der analytischen Arbeit auf sich nahm, habe ich im Laufe mehrerer Jahre eine größere Reihe von Kalziumanalysen im Blut[2]) und in den Organen[3]) normaler und kalziumvergifteter Katzen ausgeführt. In der Blutflüssigkeit stieg der normale, ziemlich konstante Kalziumwert bei intravenöser Injektion bis auf das Dreifache, um aber bald abzusinken und in drei Stunden zur Norm zurückzukehren; bei Einspritzung unter die Haut oder Inhalation betrug die Steigerung höchstens das $1^1/_2$fache der Norm, die übrigens ebenfalls nach wenigen Stunden, wenn auch deutlich später wieder erreicht wurde. Beim Vergleich mit dem zeitlichen Ablauf der Vergiftungssymptome war also festzustellen, daß diese vom Kalziumgehalt der Blutflüssigkeit unabhängig sind, da sie ja fast regelmäßig viel längere Zeit bestehen als die Vermehrung des Kalziums im Blute.

Eine unerwartete Schwierigkeit ergab sich bei der Bearbeitung der Organe, insofern bei normalen Tieren recht weite Schwankungen des Normalbestandes an Kalzium aufgedeckt wurden. Dies ist sehr auffällig, weil die bisher bekannten Mineralanalysen von Organen eine relativ geringe Schwankungsbreite für die einzelnen Elemente ergeben hatten — wie wir das überhaupt allgemein für die chemische Zusammensetzung bestimmter, gesunder Gewebe gewohnt sind —, weil überdies in der Blutflüssigkeit die strenge Konstanz des Kalziumwertes vielfach erhärtet ist. Allerdings hatte schon die Untersuchung der Blutkörperchen ergeben, daß deren Kalziumgehalt bei verschiedenen Individuen zwischen Null

1) Chiari und Januschke, a. a. O.
2) Biochemische Zschr. **93**, 187. 1919.
3) Ebenda **93**, 353. 1919; **135**, 248. 1923.

und deutlich positiven, wenn auch stets geringen Werten schwankt. In der Muskulatur, Hirnsubstanz, Leber und Niere wurde als Minimalwert etwa 4 mg Ca auf 100 g des frischen Gewebes gefunden, bei anderen Individuen jedoch höhere Zahlen, die häufig den dreifachen, ja vereinzelt den vier- bis fünffachen Betrag erreichten. Darm, Herz und Lunge lieferten höhere Minimalwerte, doch ebenfalls Variationen bis zum doppelten Betrag. Übrigens galt keineswegs die Regel, daß bestimmte Individuen nun in ihren sämtlichen Organen eine gleichsinnige Einstellung des Kalziumwertes aufgewiesen hätten, sondern einzelne Organe konnten das Minimum, andere das Doppelte enthalten u. s. w. Erinnert man sich der Tatsache, daß der Kalziumgehalt der Umgebungsflüssigkeit, z. B. bei isolierten, aus dem Körper herausgenommenen Organen, auf deren Funktionen einen entschiedenen Einfluß hat, so kann man sich der Schlußfolgerung kaum entziehen, daß bei den Individuen oder Organen mit hohem Kalziumgehalt ein Teil dieses Kalziums in irgend einer Weise physiologisch unwirksam gemacht ist. Einfache „Verkalkungen", d. h. Niederschläge schwer löslicher Kalziumsalze konnten bei gelegentlichen mikroskopischen Prüfungen, die Herr Dr. Staemmler freundlicherweise ausführte, nicht gefunden werden. Zweifellos besteht hier noch ein ungelöstes Problem.

Diese Sachlage bei normalen Tieren erschwerte natürlich die Beurteilung der analytischen Befunde bei kalziumvergifteten Tieren außerordentlich. Da die injizierte Kalziummenge bei gleichmäßiger Verteilung eine Steigerung auf den doppelten Normalbetrag erwarten ließ, dieser selbst aber in den voluminösesten Organen bis zum Dreifachen variierte, war mit Einzelbefunden nichts anzufangen und eine größere Versuchsreihe nötig, um durch eine Art statistischen Verfahrens, d. h. Vergleich der vorkommenden Maximal- und Minimal-, sowie der Mittelwerte zu einem Urteil darüber zu gelangen, ob und wo der Kalziumgehalt während der Vergiftung vermehrt sei. Das Ergebnis war durchaus negativ, d. h. die Grenz- und die Mittelwerte der normalen und der vergifteten Tiere waren gleich; nur in dem Ausscheidungsorgan Niere war eine gesetzmäßige Vermehrung erkennbar. Vielleicht gilt Gleiches auch für die Haut, doch reichen die Belege dafür noch nicht endgültig aus. Um von den individuellen Schwankungen loszukommen, wurde schließlich unter freundlicher Mitwirkung des Chirurgen Dr. W. Lehmann bei normalen Tieren ein Bein amputiert, dessen Muskulatur untersucht wurde, um als Kontrolle gegen das zweite Bein zu dienen, nachdem das — von der Operation

erholte — Tier vergiftet war. Auch hier fand sich kein merklicher Unterschied des Kalziumgehaltes.

Die Untersuchung verschiedener Hirnteile im Vergleich zueinander konnte bisher noch nicht ausgeführt werden, weil die zur Verfügung stehende Methode größere Organgewichte erforderte, als die betreffenden wichtigsten Teile, besonders des Mittelhirns, selbst besaßen. Durch Verfeinerung der Methodik, die Herr Gerhard Hecht[1]) in Anlehnung an de Waard ausgearbeitet hat, ist es nunmehr möglich, solche Untersuchungen mit Aussicht auf ein Ergebnis vorzunehmen.

Natürlich mußte nach den geschilderten Ermittelungen die Frage auftauchen: Wo bleibt das eingespritzte Kalzium? In den Ausscheidungen wurde, soweit bisher danach gefahndet wurde, nur ein Teil des gesamten Überschusses wiedergefunden. Ein anderer, nicht geringer Teil muß im Laufe einiger Stunden innerhalb des Körpers verschwinden und das ist nur möglich durch Ablagerung im Knochen; dieser Vorgang ist nicht ohne Bedeutung, weil dabei auch die entsprechenden sauren Anteile der Knochensalze, d. h. Phosphorsäure und Kohlensäure erforderlich sind, die aus den Gewebsflüssigkeiten entnommen werden müssen. Hier sind diese Säuren aber etwa in der Stufe des sekundären Phosphats und primären Karbonats vorhanden, im Knochen aber als die basischeren Salze tertiäres Phosphat und sekundäres Karbonat; daraus folgt, daß bei der Ablagerung von Kalzium im Knochen, das in Form eines Neutralsalzes, wie Kalziumchlorid zugeführt war, Säure frei wird, die in den weichen Geweben neutralisiert werden muß, die Ausscheidungen beeinflußt, und vielleicht auch für die Funktionen der Gewebe von Bedeutung werden kann. Daß die Ausscheidungen nach Kalziumzufuhr in der Tat gleiche Veränderungen erleiden wie nach Säurezufuhr, ist erwiesen[2]).

III.

Einer Aufklärung bedurfte aber nach dem Fehlschlag der analytischen Untersuchung nun erst recht die Wirkung des Kalziums. Anknüpfend an die soeben entwickelten Schlußfolgerungen vermutete ich, daß die Verarmung der Gewebe an Phosphat die Ursache der Vergiftungssymptome sein könne, und prüfte infolgedessen, ob durch Zugabe von Phosphat die Giftwirkung des Kalziums aufgehoben oder wenigstens vermindert werden könnte. Es trat jedoch das Gegenteil ein: die wirksame Dosis des Kalziums erniedrigte sich; an der tötlichen Dosis konnte dies quantitativ verfolgt und dabei ermittelt werden, daß die Steigerung

1) Biochem. Zschr. **143**, 342. 1923.

2) György, Klin. Wochenschr. 1922, 1399. — J. B. S. Haldane, Hill und Luck, Journal of physiol. **57**, 301. 1923.

der Kalziumgiftigkeit durch äquivalente Mengen Phosphat um so größer wurde, je näher die beiden Injektionen zeitlich zusammenfielen; bei gleichzeitiger Einspritzung der Kalziumlösung in eine und der Phosphatlösung in eine andere Vene war die Wirkung des Kalziums 2 bis 3mal so stark wie ohne Phosphat. Daraus ergab sich mit Bestimmtheit, daß auch eine Verarmung an Phosphat nicht die Ursache der Giftwirkung sein konnte; dagegen mußte der Gedanke aufkommen, daß das aus Kalzium und Phosphat gebildete Produkt wesentlich beteiligt sei. Daher wurden nach einer im Prinzip von De Toni[1]) angegebenen Methode Mischungen äquivalenter Mengen von Kalziumchlorid und tertiärem Natriumphosphat bei Gegenwart von β-Glutin (gekochter Gelatine) hergestellt, in denen sich das gebildete Kalziumphosphat nicht sofort niederschlug, sondern — je nach der Konzentration, sowie Art und Menge des β-Glutins — in mehr oder weniger feiner Verteilung vorübergehend oder lange Zeit suspendiert oder kolloidal gelöst blieb. Bei der Injektion solcher Produkte ergab sich kein regelmäßiges Resultat: in zwei von sieben Versuchen traten jedoch die charakteristischen Vergiftungssymptome bei Kalziummengen auf, die noch kleiner waren als sie bei gleichzeitiger Injektion von Chlorkalzium und tertiärem Phosphat erforderlich sind. Vollkommen klare, sehr gut geschützte kolloidale Lösungen schienen kaum wirksam zu sein; sehr grobe Suspensionen führten während der Injektion zum Tode, offenbar durch Embolie (Verlegung wichtiger Blutgefäße, z. B. im Herzen); die beiden positiven Ergebnisse wurden mit Lösungen erzielt, die zunächst schwach opaleszent waren, sich jedoch während der Einspritzung noch stärker trübten.

Der Gedanke schien sich also zu bewähren, daß die wesentlichen Symptome der Kalziumvergiftung in Wahrheit fein verteilten Partikelchen von Kalziumphosphat zuzuschreiben seien. Dann war es auch denkbar, daß solche Partikelchen an irgend welchen Stellen des Gewebes, gewissen Zelloberflächen oder dgl. niedergeschlagen wurden und dort erhebliche Störungen der Funktion herbeiführen konnten, ohne daß die Analyse größerer Gewebsstücke eine sichere Vermehrung des Kalziums erkennen ließe. Um diese Vermutung weiter zu prüfen, wurde versucht, ob andere, ähnlich fein verteilte Partikelchen, die jedoch frei von Kalzium waren, imstande seien, die gleichen Wirkungen auszuüben. Es wurden Fällungen von Bariumsulfat und Eisenphosphat in β-Glutin-

1) Kolloid-Zeitschrift **28**, 145. 1921.

lösungen erzeugt und die entstehenden mehr oder weniger getrübten Mischungen injiziert. In einigen Fällen traten Vergiftungssymptome auf, die den typischen „Kalziumsymptomen“ durchaus glichen; mit größerer Regelmäßigkeit wurde, besonders durch Eisenphosphat, die exsudative Entzündung (Chemosis) der Augenbindehaut nach Senföleinträufelung verhindert. Freilich war β-Glutin allein in einigen Fällen auch nicht ganz unwirksam in dieser Hinsicht, so daß Zweifel bestehen blieben, obwohl die quantitativen Unterschiede in die Augen sprangen. Jeder Zweifel aber wurde behoben, als sich erwies, daß ein schwach opaleszentes Präparat von kolloidaler Kieselsäure (Nr. 313 der Firma Heyden) nicht nur die Senfölchemosis prompt verhinderte — wie bereits Leo, v. Carnap und Hesse[1]) festgestellt hatten — sondern auch die charakteristische Taumellähmung zu Wege brachte. Mindestens ist soviel sicher, daß das Vergiftungsbild in allen Einzelheiten auch ohne Kalzium zustande kommen kann und daß alle Substanzen, bei denen es beobachtet werden konnte, nicht in molekularer, sondern in gröberer Aufteilung ins Blut gespritzt wurden.

Beiläufig mag erwähnt sein, daß bei der Injektion von Bariumsulfat die Symptome der Bariumvergiftung (neben den „Kalziumsymptomen“ oder ohne diese) zu beobachten waren, vor allem krampfhafte, durch die Bauchdecken hindurch erkennbare Kontraktionen des Darms, sowie vermehrte Entleerungen; es geht daraus hervor, daß man auch bei so schwer löslichen Salzen an die Wirksamkeit von Ionen denken muß, wenn deren Wirkungsschwelle nur niedrig genug liegt. Vom Chlorsilber ist ja die hohe Giftigkeit schon lange bekannt[2]). Auch für das Kalzium muß man sich diese Frage vorlegen; doch könnte es sich bei diesem körpereigenen und relativ wenig giftigen Ion nur um eine Konzentrationserhöhung an ganz bestimmten, wenig ausgedehnten Orten, wie Zellgrenzen u. dgl. handeln, nicht um allgemeine Konzentrationserhöhung der Ionen in der Körperflüssigkeit; insofern besteht also ein deutlicher Unterschied gegenüber Barium und Silber.

Die geschilderten Versuche wurden mit Unterstützung von Frl. Marie Müller und Herrn Gerhard Hecht ausgeführt.

IV.

Die oben S. 49) bereits berührte Änderung des Säure-Basengleichgewichts im Organismus durch Zufuhr größerer Mengen von Kalziumchlorid soll nach Freudenberg und György[3]) die wesentliche Ursache einer Heilwirkung bei Tetanie sein, die sie als bedingt durch eine Alkalosis, d. h. Alkaliüberschuß im Blut oder in den Geweben ansehen. Starke Argumente für diese Auffassung sind darin gegeben, daß einmal durch forzierte Atmung,

1) Arch. f. exper. Pathol. und Pharmakol. **96**, 133. 1922.
2) O. Gros, ebenda **70**, 375. 1912.
3) Jahrb. f. Kinderheilk. **96**, 1921. — Klinische Wochenschr. 1922, 410.

also vermehrte Ausscheidung von Kohlensäure, ebenso wie durch Verschluß des Magenpförtners mit häufigem Erbrechen von salzsaurem Magensaft in manchen Fällen die typischen Symptome der Tetanie auftreten, und daß zweitens die Zufuhr von Salzsäure oder Ammoniumchlorid, das im Körper Harnstoff und Salzsäure liefert, diese Symptome ebenso wie Chlorkalzium beseitigt.

Einen weiteren Zusammenhang zwischen Kalzium und Säure kann man einer interessanten Feststellung von Spiro[1]) entnehmen: bei der Mischung von Chlorkalziumlösung mit Aminosäuren schlug die Reaktion stets deutlich nach der sauren Seite aus, weil offenbar die Bindung des Kalziums an eine Aminosäure komplexer Natur ist, d. h. einen Teil der basischen Affinitäten beschlagnahmt, so daß Säure frei wird. Man darf erwarten, daß die Bindung des Kalziums an Eiweiß wesensgleich ist; dennoch ist es schwer vorstellbar, wie unter den im Körper vorliegenden Bedingungen diese Reaktionsverschiebung ein größeres Ausmaß erreichen könnte, wenn auch nicht bestritten werden soll, daß sie an bestimmten Orten (Zellgrenzen usw.) von Bedeutung werden mag.

Für die Vergiftungssymptome an Katzen, wie sie oben geschildert wurden, kann die Säurebildung nicht in Frage kommen. Denn gleichzeitige Injektion äquivalenter Mengen Natriumbicarbonat schwächte die Giftwirkung nicht ab, sondern schien sie eher zu verstärken. Ferner war die Wirkung von Kalziumazetat keineswegs deutlich geringer als die des salzsauren Salzes, obwohl die Essigsäure im Körper zu weniger oder gar nicht sauren Produkten umgewandelt wird und daher in viel geringerem Grade als Salzsäure fähig ist, im Sinne einer Übersäuerung der Gewebe zu wirken. Da nun aber die Summe der Versuche an Katzen erwiesen haben, daß ein Parallelismus zwischen den Vergiftungssymptomen und der entzündungswidrigen Wirkung des Kalziums besteht, so ist gewiß, daß jedenfalls diese Seite der Heilwirkungen nicht mit der „azidotischen“ Wirkung anorganischer Kalziumsalze zusammenhängt.

Man ist also wohl genötigt, mindestens drei verschiedene Arten von „Kalziumwirkung“ zu unterscheiden, erstens die durch Kalziumionen, zweitens die durch Säuerung des Blutes oder der Gewebe, drittens die vermutlich durch Partikelchen von Kalziumphosphat bedingte. Es ist aber von hohem Interesse, wie diese drei Arten miteinander zusammenhängen. Bereits oben war angedeutet, daß durch Teilchen von Kalziumphosphat unter Umständen Kalziumionen an gewissen Orten angereichert werden könnten, nämlich in dem Falle, daß diese Orte zugleich Produktionsstätten von Säure wären, die das tertiäre Phosphat zersetzen würde. Denn es besteht innerhalb des Organismus bei der Gegenwart von Phosphat

1) Schweizer med. Wochenschr. 1921, 457.

und vor allem auch Karbonat eine strenge Abhängigkeit der Konzentration der Kalziumionen von der Konzentration der Wasserstoffionen; bekanntlich sind die saureren Kalziumsalze der Phosphorsäure und Kohlensäure wesentlich löslicher als die basischeren. Für das Gleichgewicht zwischen Kalzium, Karbonat und Säure haben Rona und Takahashi[1]) das zahlenmäßige Verhältnis

$$\frac{[Ca^{\cdot\cdot}] \cdot [HCO_3']}{[H^{\cdot}]} = 350\ (18^0)$$

angegeben, das im Wesentlichen auch den Bedingungen in der karbonatreichen, phosphatarmen Blutflüssigkeit entspricht.

Verschiebungen des Säurebasengleichgewichts, die selten durch Änderungen der Konzentration der Wasserstoff-, eher durch solche der Bikarbonat- oder Phosphationen gekennzeichnet sind, müssen also theoretisch auch die Konzentration der Kalziumionen ändern. Freudenberg und György halten in der Tat deren Konzentration für diejenige Größe, die unmittelbar den Erregbarkeitszustand des Nervensystems und damit die Neigung zur Tetanie bestimmt. Vielleicht kann man auch an die Muskeln selbst denken, deren Erregbarkeit durch verminderten Kalziumgehalt der Umgebungsflüssigkeit allgemein gesteigert wird, im besonderen aber gerade für solche Reizformen, die einem träger reagierenden Organ angepaßt sind[2]). Die langanhaltenden „tonischen" Krampfzustände bei Tetanie könnten an unmittelbare Beziehungen zu diesen physiologischen Feststellungen denken lassen.

V.

Die ansprechende Lehre von der Bedeutung der Kalziumionen überhaupt und speziell bei der Tetanie und ihrer Vorstufe Spasmophilie, sowie von den Schwankungen in der Konzentration der wirksamen Ionen mit geringen Verschiebungen der Reaktion kann aber nach meiner Ansicht nicht als endgültig gesichert angesehen werden. Denn es gibt mancherlei Bedenken, die sich dagegen vorbringen lassen.

Bereits an dem vielgebrauchten biologischen Testobjekt für Kalziumwirkungen, dem isolierten Froschherzen, ist es auffällig, daß die Funktion des Organs durchaus abhängt von dem Verhältnis des absoluten Gehalts an Kalium und Kalzium in der

1) Biochem. Zschr. **49**, 370. 1913.

2) Keith Lucas, Journal of Physiol. **37**, 472. 1908; Mines, ebenda 437. Gildemeister und Kahn, Pflügers Arch. **143**, 428. 1912.

Speiseflüssigkeit, auch unter Bedingungen, wo eine Änderung der Ionenzahl kaum denkbar ist. So haben z. B. P. Trendelenburg und Goebel[1]) physiologische Salzlösungen bereitet, in denen durch Zusatz von ziemlich viel Bikarbonat und etwas primärem Phosphat eine genau dem Blut entsprechende Reaktion (p_H = 7, 3) hergestellt und ihre Erhaltung durch „Pufferwirkung" gut gesichert war; die zugesetzte Kalziummenge betrug 4,5 mg % Ca und führte entsprechend der Forderung der Theorie auch nach einigen Stunden zur Ausscheidung von Kalziumkarbonat. Man hätte nach der Theorie erwarten sollen, daß nur etwa 50 % der vorhandenen Kalziummenge ionisiert und infolgedessen biologisch wirksam gewesen wäre; alleinige Verminderung des Kalziums auf die Hälfte bei Konstanthaltung der übrigen Bedingungen hätte also keinen biologischen Effekt haben dürfen. Trotzdem führte eine Verminderung um 30 % bereits zu deutlicher, um 50 % zu sehr erheblicher Verkleinerung der Herzkontraktionen; vor allem aber führte auch Vermehrung des Kalziums nicht selten zu einer beträchtlichen Vergrößerung der Herzschläge, obwohl die Zahl der Kalziumionen unmöglich zunehmen konnte. Mit diesen Beobachtungen stimmt durchaus überein, was Nöther[2]) bei Versuchen mit dem „Normosal" von W. Straub (einem kalziumhaltigen Ersatz für physiologische Salzlösung) ermittelte: die für das Froschherz charakteristische Reaktion auf verminderten Kalziumgehalt der Speiseflüssigkeit trat nicht ein, wenn diese aus Normosal bestand, dessen Kalzium durch unvorsichtiges Erhitzen zum Teil in eine weniger disperse kolloidale Form gebracht worden war, während sich die genannte Reaktion sofort zeigte, sobald ein Teil des Kalziums als Niederschlag ausgeflockt und abfiltriert war; immerhin war in diesen Versuchen die Reaktion nicht streng beobachtet und hätte vielleicht verschieden sein und die Zahl der Kalziumionen beeinflussen können — wenn dies auch nicht gerade sehr wahrscheinlich ist. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang weiterhin der Befund von K. Spiro[3]), daß nämlich die Kaliumvergiftung des Froschherzens jederzeit leicht und prompt durch Kalzium aufgehoben wird, dagegen die Kalziumvergiftung durch Kalium nicht; Spiro sucht diesen Unterschied durch die Fähigkeit des Kalziums zur Komplexbildung mit Aminosäuren, also auch mit Eiweiß zu erklären, indem er meint, daß das einmal im Gewebe verankerte

---

1) Arch. f. exp. Path. und Pharmakol. **89**, 171. 1921.
2) Münchener med. Wochenschr. 1921, 545.
3) A. a. O.

Kalzium nicht so leicht wieder davon zu lösen sei; trifft diese Annahme zu, so wäre damit auch erwiesen, daß die in der Umgebungsflüssigkeit vorhandenen Ionen nicht unbedingt das Maß für die biologische Wirksamkeit des Kalziums darstellen.

Speziell für die Tetaniefrage ist es wichtig, daß eine der sichersten Tatsachen die Verminderung des Gesamtkalziums im Blutplasma ist und zwar sowohl bei der Krankheit der Säuglinge, wie bei der künstlichen Erzeugung der Affektion, die man am Tier durch operative Beseitigung der Nebenschilddrüsen erhält. Bei der erfolgreichen Behandlung der Krankheit kehrt wiederum das Gesamtkalzium zur alten Höhe zurück. Daß die Ionenzahl den Änderungen des Gesamtkalziums parallel gehe, ist bisher nicht bewiesen. Trendelenburg und Goebel, die von der Voraussetzung ausgingen, daß das Froschherz ein sicherer Anzeiger der Kalziumionen sei und mit dieser Methode das Blut von Tetanie-Katzen studierten, kamen zu einem Ergebnis, das geradezu als Widerlegung der Annahme betrachtet werden kann, daß sich bei der Tetanie die Zahl der Kalziumionen vermindere: Sie fanden zwar entsprechend ihrer Erwartung, daß das Blutserum der kranken Tiere sich gegenüber dem Froschherzen im Vergleich zu gesunden wie eine kalziumärmere Lösung verhielt; genau das gleiche aber zeigte sich, als sie die Asche der beiden Serumarten von Neuem in Lösung brachten und miteinander am Froschherzen verglichen; bei dieser Auflösung wurde durch sorgfältige Neutralisation und Zusatz von Bicarbonat (0,1 %) in allen Proben die gleiche Reaktion hergestellt. Man hätte also gleiche Ionenzahl und demnach auch gleiche Wirksamkeit erwarten müssen, wenn die Methode wirklich nur Ionen anzeigte; denn der Verlust an Ca betrug im Maximum ein Drittel, während fast vier Fünftel des normalen Kalziumbestandes nicht ionisiert sind. Interessanterweise war aber die Übereinstimmung in den beiden Versuchsreihen (mit natürlichem Serum und mit Lösungen der Serumasche) so groß, daß der Tetanieprobe auch quantitativ stets die gleiche Menge Kalziumsalz zugesetzt werden mußte, um sie dem normalen Serum gleichwertig zu machen. Dies deutet doch mit großer Bestimmtheit auf die Wichtigkeit des Gesamtkalziumgehaltes sowohl für die Funktion des Froschherzens wie für die Tetanie hin.

Natürlich ist noch nicht endgültig auszuschließen, daß Verschiebungen der Kalziumionenzahl, wenigstens in den Geweben vorkommen. Aber es ist wichtig, festzustellen, daß dies Vermutungen sind, während der Zusammenhang zwischen Verminderung des Gesamtkalziums im Blutplasma und Tetaniesymptomen tatsächlich und gesetzmäßig ist.

Für die Deutung der Tetaniesymptome nach forzierter Atmung usw. können neben Alkalosis noch andere Veränderungen im Mineralbestand des Blutes und der Gewebe in Betracht kommen, worauf amerikanische Forscher [1]) bereits aufmerksam gemacht haben.

VI.

Ein sehr merkwürdiges Problem im Verhalten des Kalziums bleibt in der Divergenz bestehen, die das künstlich unter Umgehung des Darmkanals zugeführte Kalzium gegenüber dem „normal", d. h. mit der Nahrung zugeführten aufweist. Während das eine in kurzer Frist fast spurlos verschwindet, scheint das andere (je nach Angebot und Bedarf?) unter Umständen in beträchtlichem Überschuß in den verschiedensten Geweben abgelagert zu werden. Diese Divergenz ist schwer zu verstehen, wenn man nicht annehmen will, daß das durch Darm und Leber gegangene Kalzium eine andere Form annimmt wie die in den Vergiftungsversuchen dem Blute zugeführte. Darüber sind einstweilen nur Vermutungen möglich, doch scheinen sie die künftige Forschung bereits in eine bestimmte Richtung zu weisen: Bei der Analyse einer Katze, die anstatt eines gewöhnlichen Salzes fructosephosphorsaures Kalzium injiziert erhielt, ermittelten die Herren Jungmann, Samter und Hecht [2]) im Blut und in verschiedenen Organen Zahlen, die wesentlich höher lagen als die sonst gefundenen. Da Zuckerphosphorsäuren ganz bestimmt reichlich im Organismus gebildet werden, ist man berechtigt, diesem Befund aufmerksamste Beachtung zu schenken. Seine Bedeutung wird noch schärfer ins Licht gestellt durch eine Mitteilung von Robison [3]), der — vor allem im Knochen und Gelenkknorpel — ein Ferment nachweisen konnte, das Hexosephosphorsäure spaltet; er glaubt daher, daß die Ablagerung der Knochensalze physiologisch durch Vermittlung von zuckerphosphorsaurem Kalzium erfolgt, das sehr gut löslich ist und daher im Körper leicht transportiert werden kann, während es bei der Spaltung sofort das schwerlösliche Kalziumphosphat absetzt. Es ist zu hoffen, daß das weitere Studium dieser Verbindung einige Aufklärung auch für heute noch schwer verständliche Befunde in der Pharmakologie des Kalziums liefert.

---

1) Collip und Backus, American Journ. of Physiol. **51**, 568. — Mac Callum und Mitarbeiter, Bull. Johns Hopkins Hospital **31**, 1. 1920. — Greenwald, Journal of biolog. Chemistry **54**, 285. 1922.

2) Biochemische Zeitschrift **144**, 1924. 265, 270.

3) Biochemical Journal **16**, 809. 1922; **17**, 286. 1923.

Zusammenfassung.

1. Die Zufuhr größerer Kalziummengen in Form von Chlorid oder Azetat (z. B. intravenös 60—90 mg Ca je kg Körpergewicht bewirkt bei Katzen und Hunden ein charakteristisches Vergiftungsbild, das in Gleichgewichtsstörungen, Tonusverlust und aufsteigender Lähmung unter frühzeitiger Beteiligung der Stellreflexe (Magnus) besteht. Der Angriffspunkt ist zentral.

2. Der Kalziumgehalt der Gewebe ist bei normalen Katzen stark wechselnd.

3. Während der Kalziumvergiftung liegt weder im Blut noch in den wichtigsten Geweben der Gehalt an Kalzium außerhalb normaler Grenzen.

4. Phosphat steigert die Kalziumvergiftung: unter Umständen ist feinverteiltes tertiäres Kalziumphosphat intravenös wesentlich giftiger als die äquivalente Menge Chlorkalzium: fein disperses Ferriphosphat und kolloidale Kieselsäure können sämtliche Symptome der Kalziumvergiftung, auch Hemmung der Senfölchemosis bewirken.

5. Es gibt Gründe gegen die Lehre, daß nur die Kalziumionen biologisch wirksam seien: dadurch wird auch die Meinung von Freudenberg und György über die Kalkbehandlung der Tetanie getroffen.

6. Zuckerphosphorsaures Kalzium scheint eine besondere Bedeutung zu besitzen.

Über die Gitterpunkte in einem Kreise.

Von

Edmund Landau.

(Vierte Mitteilung.)[1])

Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Dezember 1923.

Es sei $U(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von n in zwei Quadrate,

$$P(x) = \sum_{1 \leqq n \leqq x} U(n) - \pi x.$$

Herr Cramér[2]) bewies für jedes $\varepsilon > 0$

$$\int_1^y P^2(x)\, dx = \beta y^{\frac{3}{2}} + O\left(y^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right),$$

wo

$$\beta = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{\frac{3}{2}}}.\,^{3)}$$

Ich werde die Cramérsche Methode vereinfachen und zu einem Beweise des neuen Satzes

$$\int_1^y P^2(x)\, dx = \beta y^{\frac{3}{2}} + O\left(y^{1+\varepsilon}\right)$$

führen.

Im folgenden bezeichnen $c_1, c_2, \ldots, c_{18}$ absolute Konstanten; e_1, e_2, e_3 nur von ε abhängige Zahlen, $\Delta f(x)$ die Differenz $f(x+1) - f(x)$.

Hilfssatz 1: *Es sei* $y > 0$, $M \geqq N \geqq -M$,

$$K_{M,N}(y) = K_{M,N} = \int_0^y x^{\frac{3}{2}} \Delta e^{iM\sqrt{x}} \Delta e^{iN\sqrt{x}}\, dx.$$

---

1) Die ersten beiden Mitteilungen erschienen im Jahrgang 1915 dieser Nachrichten, S. 148—160 und 161—171, die dritte im Jahrgang 1920, S 109—134.

2) *Über zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy* [Mathematische Zeitschrift, Bd. XV (1922), S. 201—210].

3) Übrigens ist $\beta = \dfrac{16\, \zeta^2_{P(i)}\left(\frac{3}{2}\right)}{3\left(1 + 2^{-\frac{3}{2}}\right) \pi^2 \zeta(3)}$.

Dann ist

$$(1)\quad |K_{M,N}| \leqq c_1 y \frac{M}{M+N} \operatorname{Min.}(\sqrt{y}, |N|), \qquad \textit{falls}\ N > -M,$$

$$(2)\quad |K_{M,-M} - \tfrac{1}{6} y^{\frac{3}{2}} M^2| \leqq c_2 M^2 \sqrt{y} \operatorname{Min.}(y, M^2),\ \textit{falls}\ M > 1.$$

Beweis: 1) Im Falle $N > -M$ gilt für $x > 0$, wenn

$$F_1(x) = e^{iM(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} - 1, \quad F_2(x) = e^{iN(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} - 1,$$
$$F(x) = x^2 F_1(x) F_2(x)$$

gesetzt wird,

$$x^{\frac{3}{2}} \Delta e^{iM\sqrt{x}} \Delta e^{iN\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} \left(e^{iM\sqrt{x+1}} - e^{iM\sqrt{x}}\right)\left(e^{iN\sqrt{x+1}} - e^{iN\sqrt{x}}\right)$$
$$= \frac{F(x)}{\sqrt{x}} e^{i(M+N)\sqrt{x}}.$$

Daher ist

$$K_{M,N} = \frac{2}{(M+N)i} \int_0^y F(x)\, d e^{i(M+N)\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2}{(M+N)i} \left(F(y) e^{i(M+N)\sqrt{y}} - \int_0^y F'(x) e^{i(M+N)\sqrt{x}} dx\right),$$

$$(3)\quad |K_{M,N}| \leqq \frac{2}{M+N} \left(|F(y)| + \int_0^y |F'(x)|\, dx\right) \leqq \frac{4}{M+N} \int_0^y |F'(x)|\, dx$$

Für $x > 0$ ist

$$|F_1(x)| \leqq 2, \quad |F_2(x)| \leqq 2,$$

$$|F_1(x)| = 2 \left|\sin \frac{M(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{2}\right| \leqq M(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \leqq \frac{M}{2\sqrt{x}}$$

$$|F_2(x)| \leqq \frac{|N|}{2\sqrt{x}},$$

$$|F_1'(x)| = M \left|\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right| \leqq \frac{M}{4x^{\frac{3}{2}}}, \quad |F_2'(x)| \leqq \frac{|N|}{4x^{\frac{3}{2}}},$$

$$|F'(x)| = |2x F_1(x) F_2(x) + x^2 F_1'(x) F_2(x) + x^2 F_2'(x) F_1(x)|$$
$$\leqq 2x \frac{M}{2\sqrt{x}} |F_2(x)| + x^2 \frac{M}{4x^{\frac{3}{2}}} |F_2(x)| + x^2 \frac{|N|}{4x^{\frac{3}{2}}} |F_1(x)|$$
$$= \frac{5}{4} M\sqrt{x}\, |F_2(x)| + \frac{1}{4} |N| \sqrt{x}\, |F_1(x)|$$

$$\leqq \operatorname{Min.}\left(\frac{5}{4} M\sqrt{x} \cdot 2 + \frac{1}{4} M\sqrt{x} \cdot 2,\ \frac{5}{4} M\sqrt{x} \frac{|N|}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}|N|\sqrt{x} \frac{M}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= M \operatorname{Min.}\left(3\sqrt{x},\ \frac{3}{4}|N|\right).$$

Nach (3) ist daher

$$|K_{M,N}| \leqq \frac{4M}{M+N} \operatorname{Min.}\left(3\int_0^y \sqrt{x}\,dx,\ \frac{3}{4}|N|\int_0^y dx\right)$$

$$= \frac{4M}{M+N} \operatorname{Min.}\left(2y^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{4}|N|y\right) \leqq 8y\,\frac{M}{M+N} \operatorname{Min.}(\sqrt{y},\ |N|).$$

2) Für $x > 0$ ist

$$\Delta e^{iM\sqrt{x}}\,\Delta e^{-iM\sqrt{x}} = \left(e^{iM(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}-1\right)\left(e^{-iM(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}-1\right)$$

$$= 4\sin^2\frac{M(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{2} = 4\sin^2\frac{M}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}.$$

Für $\varphi > 0$ ist

$$|\sin^2\varphi - \varphi^2| < c_3\varphi^4;$$

daher ist unter der Annahme $M > 1$

$$\left|4\sin^2\frac{M}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} - \frac{M^2}{4x}\right|$$

$$\leqq \left|4\sin^2\frac{M}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} - \frac{M^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2}\right|$$

$$+ M^2\left|\frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2} - \frac{1}{4x}\right| < c_4\frac{M^4}{x^2} + c_5\frac{M^2}{x^2} < c_6\frac{M^4}{x^2},$$

$$\left|K_{M,-M} - \frac{M^2}{4}\int_0^y \sqrt{x}\,dx\right| < c_6 M^4 \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{x}} = c_7 M^4\sqrt{y}.$$

Im Falle $M^2 \leqq y$ ist hiermit (2) bewiesen; im Falle $y < M^2$ ist (2) trivial wegen

$$\left|K_{M,-M} - \frac{1}{6}y^{\frac{3}{2}}M^2\right| < \int_0^y x^{\frac{3}{2}}\cdot 2\cdot 2\,dx + y^{\frac{3}{2}}M^2 = c_8 y^{\frac{5}{2}} + y^{\frac{3}{2}}M^2 < c_9 y^{\frac{3}{2}}M^2.$$

Hilfssatz 2: *Für*

$$\Phi(x) = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\,\Delta\cos\left(2\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)$$

ist

$$\int_0^y \Phi^2(x)\,dx = \beta y^{\frac{3}{2}} + O\left(y^{1+\varepsilon}\right).$$

Beweis: ε darf $< \frac{1}{4}$ angenommen werden. Wird für $y > 0$

$$L_{m,n}(y) = L_{m,n} = \int_0^y x^{\frac{3}{2}}\,\Delta\cos\left(2\pi\sqrt{mx}-\frac{\pi}{4}\right)\Delta\cos\left(2\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)dx,$$

$$T_m(y) = T_m = \sum_{n<m}\frac{U(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\,L_{m,n}$$

gesetzt, so ist

$$\pi^4 \int_0^y \Phi^2(x)\,dx = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{U(m)\,U(n)}{m^{\frac{5}{4}}\,n^{\frac{5}{4}}} L_{m,n}$$

(4) $$= 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{U(m)}{m^{\frac{5}{4}}} T_m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U^2(m)}{m^{\frac{5}{2}}} L_{m,m}.$$

Wird $2\pi\sqrt{m} = M$, $2\pi\sqrt{n} = N$ gesetzt, so ist für $n \leqq m$

$$\Delta \cos\left(2\pi\sqrt{mx} - \frac{\pi}{4}\right) \Delta \cos\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\Delta e^{iM\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}i} + \Delta e^{-iM\sqrt{x} + \frac{\pi}{4}i}\right)\left(\Delta e^{iN\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}i} + \Delta e^{-iN\sqrt{x} + \frac{\pi}{4}i}\right)$$

$$= -\frac{i}{4} \Delta e^{iM\sqrt{x}} \Delta e^{iN\sqrt{x}} + \frac{i}{4} \Delta e^{-iM\sqrt{x}} \Delta e^{-iN\sqrt{x}}$$

$$+ \frac{1}{4} \Delta e^{iM\sqrt{x}} \Delta e^{-iN\sqrt{x}} + \frac{1}{4} \Delta e^{-iM\sqrt{x}} \Delta e^{iN\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2} \Im\left(\Delta e^{iM\sqrt{x}} \Delta e^{iN\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2} \Re\left(\Delta e^{iM\sqrt{x}} \Delta e^{-iN\sqrt{x}}\right),$$

(5) $$L_{m,n} = \frac{1}{2} \Im K_{M,N} + \frac{1}{2} \Re K_{M,-N}.$$

1) Für $m > n$ ist $M > N > 0$. Nach (5) und (1) ist

$$|L_{m,n}| \leqq |K_{M,N}| + |K_{M,-N}| \leqq 2c_1 y \frac{M}{M-N} \operatorname{Min.}(\sqrt{y}, N)$$

$$< c_{10}\, y \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}} \operatorname{Min.}(\sqrt{y}, \sqrt{n}) < c_{11}\, y \frac{m}{m-n} \operatorname{Min.}(\sqrt{y}, \sqrt{n}),$$

$$|T_m| \leqq c_{11}\, y\, m \sum_{n<m} \frac{U(n) \operatorname{Min.}(\sqrt{y}, \sqrt{n})}{n^{\frac{5}{4}}(m-n)} \leqq e_1 y m^{1+\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{n<m} \frac{\operatorname{Min.}(\sqrt{y}, \sqrt{n})}{n^{\frac{5}{4}}(m-n)}$$

$$\leqq e_1 y m^{1+\frac{\varepsilon}{2}} \left(\sum_{n \leqq \frac{m}{2}} \frac{\operatorname{Min.}(\sqrt{y}, \sqrt{n})}{n^{\frac{5}{4}} \frac{m}{2}} + \sum_{\frac{m}{2} < n \leqq m} \frac{\operatorname{Min.}(\sqrt{y}, \sqrt{m})}{\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{5}{4}} (m-n)} \right)$$

$$< e_2 y m^{\varepsilon} \left(\sum_{n \leqq m} \frac{\operatorname{Min.}(\sqrt{y}, \sqrt{n})}{n^{\frac{5}{4}}} + \frac{\operatorname{Min.}(\sqrt{y}, \sqrt{m})}{\sqrt[4]{m}} \right).$$

Im Falle $y \leqq m$ ist die letzte Klammer

$$< \sum_{n \leqq y} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} + \sqrt{y} \sum_{n > y} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{m}} < c_{12}\left(\sqrt[4]{y} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{m}}\right) < c_{13} \sqrt[4]{y}$$

im Falle $y > m$ ist sie

$$= \sum_{n \leqq m} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt[4]{m}} < c_{14} \sqrt[4]{m};$$

daher ist

$$|T_m| < c_8\, y\, m^{\varepsilon} \operatorname{Min.} (\sqrt[4]{y}, \sqrt[4]{m}),$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{U(m)}{m^{\frac{5}{4}}} T_m = O\Big(y \sum_{m \leqq y} \frac{U(m)}{m^{1-\varepsilon}}\Big) + O\Big(y^{\frac{5}{4}} \sum_{m > y} \frac{U(m)}{m^{\frac{5}{4}-\varepsilon}}\Big)$$

(6) $$= O\big(y^{1+\varepsilon}\big).$$

2) Nach (5) ist, da $K_{M,-M}$ reell ist,

(7) $$L_{m,m} = \frac{1}{2} \Im K_{M,M} + \frac{1}{2} K_{M,-M}.$$

Nach (1) ist

(8) $$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{U^2(m)}{m^{\frac{5}{2}}} \frac{1}{2} \Im K_{M,M} = O \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U^2(m)}{m^{\frac{5}{2}}} y \sqrt{m} = O(y).$$

Nach (2) ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{U^2(m)}{m^{\frac{5}{2}}} \frac{1}{2} K_{M,-M} - \pi^4 \beta y^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U^2(m)}{m^{\frac{5}{2}}} \Big(K_{M,-M} - \frac{1}{6} y^{\frac{3}{2}} (2\pi\sqrt{m})^2\Big)$$

$$= O\Big(\sqrt{y} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U^2(m)}{m^{\frac{3}{2}}} \operatorname{Min.} (y, m)\Big)$$

(9) $$= O\Big(\sqrt{y} \sum_{m \leqq y} \frac{U^2(m)}{\sqrt{m}}\Big) + O\Big(y^{\frac{3}{2}} \sum_{m > y} \frac{U^2(m)}{m^{\frac{3}{2}}}\Big) = O\big(y^{1+\varepsilon}\big).$$

Aus (7), (8), (9) folgt

(10) $$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{U^2(m)}{m^{\frac{5}{2}}} L_{m,m} = \pi^4 \beta y^{\frac{3}{2}} + O\big(y^{1+\varepsilon}\big),$$

aus (4), (6), (10) die Behauptung.

Hilfssatz 3: *Für*

$$Q(x) = P(x) + 1,$$

$$\Psi(x) = \int_x^{x+1} Q(w)\, dw$$

ist

$$\int_0^y \Psi^2(x)\, dx = \beta y^{\frac{3}{2}} + O\big(y^{1+\varepsilon}\big).$$

Beweis: Bekanntlich ist für $x \geqq 0$

(11) $$\int_0^x Q(w)\,dw = \frac{x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n} J_2(2\pi\sqrt{nx}),$$

also

$$\Psi(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n} \Delta(x J_2(2\pi\sqrt{nx})),$$

$$\Omega(x) = \Psi(x) + \Phi(x)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n} \left(\Delta(x J_2(2\pi\sqrt{nx})) + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\pi\sqrt[4]{n}} \Delta \cos\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Für $x > 0$ ist

$$\left| \frac{d}{dx} \left(x J_2(2\pi\sqrt{nx}) + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\pi\sqrt[4]{n}} \cos\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \right|$$

$$= \left| \pi\sqrt{n}\sqrt{x} J_1(2\pi\sqrt{nx}) - \sqrt[4]{n}\sqrt[4]{x} \sin\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{3}{4\pi\sqrt[4]{n}\sqrt[4]{x}} \cos\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) \right| < \frac{c_{15}}{\sqrt[4]{n}\sqrt[4]{x}},$$

wegen

$$J_1(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{y}} + O\left(\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Daher ist

$$\left| \Delta(x J_2(2\pi\sqrt{nx})) + \frac{1}{\pi\sqrt[4]{n}} \Delta\left(x^{\frac{3}{4}} \cos\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \right| < \frac{c_{15}}{\sqrt[4]{n}\sqrt[4]{x}}.$$

Andererseits ist

$$\left| \Delta\left(x^{\frac{3}{4}} \cos\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)\right) - x^{\frac{3}{4}} \Delta \cos\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) \right|$$

$$= \left((x+1)^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{3}{4}}\right) \left| \cos\left(2\pi\sqrt{n(x+1)} - \frac{\pi}{4}\right) \right| < \frac{c_{16}}{\sqrt[4]{x}};$$

folglich ist

$$\left| \Delta(x J_2(2\pi\sqrt{nx})) + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\pi\sqrt[4]{n}} \Delta \cos\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) \right| < \frac{c_{17}}{\sqrt[4]{n}\sqrt[4]{x}},$$

$$|\Omega(x)| < \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n} \frac{c_{17}}{\sqrt[4]{n}\sqrt[4]{x}} = \frac{c_{18}}{\sqrt[4]{x}},$$

$$\int_0^y \Omega^2(x)\,dx = O \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{x}} = O(\sqrt{y}).$$

Nach Hilfssatz 2 ist

$$\int_0^y \Phi^2(x)\,dx = \beta y^{\frac{3}{2}} + O\left(y^{1+\varepsilon}\right),$$

also

$$\left|\int_0^y \Phi(x)\,\Omega(x)\,dx\right| \leqq \sqrt{\int_0^y \Phi^2(x)\,dx \cdot \int_0^y \Omega^2(x)\,dx} = O\sqrt{y^{\frac{3}{2}}\sqrt{y}} = O(y)$$

$$\int_0^y \Psi^2(x)\,dx = \int_0^y \Phi^2(x)\,dx - 2\int_0^y \Phi(x)\,\Omega(x)\,dx + \int_0^y \Omega^2(x)\,dx$$
$$= \beta y^{\frac{3}{2}} + O\left(y^{1+\varepsilon}\right).$$

Hilfssatz 4: *Für ganzzahlig wachsendes g ist*

$$\int_g^{g+1} \left(\Psi^2(x) - Q^2(x+\tfrac{1}{2})\right) dx = O\left(g^{\varepsilon}\right).$$

Beweis: Wird

$$Q(x) + \pi x = \sum_{0<n<x} U(n) = A(x)$$

gesetzt, so ist für $g \leqq x \leqq g+1$

$$\Psi(x) = \int_x^{x+1} \left(A(g) + U(g+1)[w-g] - \pi w\right) dw$$
$$= A(g) + U(g+1)(x-g) - \pi(x+\tfrac{1}{2}),$$
$$Q(x+\tfrac{1}{2}) = A(g) + U(g+1)[x-g+\tfrac{1}{2}] - \pi(x+\tfrac{1}{2}),$$
$$\Psi(x) - Q(x+\tfrac{1}{2}) = U(g+1)(x-g-[x-g+\tfrac{1}{2}]),$$

also

$$\int_g^{g+1} \left(\Psi(x) - Q(x+\tfrac{1}{2})\right) dx = 0,$$

$$\int_g^{g+1} \left(\Psi^2(x) - Q^2(x+\tfrac{1}{2})\right) dx$$
$$= \int_g^{g+1} \left(\Psi(x) + Q(x+\tfrac{1}{2}) - 2Q(g)\right)\left(\Psi(x) - Q(x+\tfrac{1}{2})\right) dx.$$

Bei wachsendem g ist der Integrand rechts gleichmäßig $O(g^{\varepsilon})$, also die Behauptung bewiesen.

Beweis des Hauptsatzes: Nach Hilfssatz 4 und 3 ist für ganzzahlig wachsendes g

$$\int_1^{g-\frac{1}{2}} Q^2(x)\,dx = \int_0^g Q^2(x+\tfrac{1}{2})\,dx + O(1)$$

$$= \int_0^g \Psi^2(x)\,dx + O\left(g^{1-\varepsilon}\right) = \beta g^{\frac{3}{2}} + O\left(g^{1-\varepsilon}\right);$$

wegen

$$\int_1^{[y]-\frac{1}{2}} Q^2(x)\,dx \leqq \int_1^y Q^2(x)\,dx \leqq \int_1^{[y]+\frac{3}{2}} Q^2(x)\,dx$$

ist also

$$\int_1^y Q^2(x)\,dx = \beta y^{\frac{3}{2}} + O\left(y^{1+\varepsilon}\right).$$

Bekanntlich $\left(\text{nämlich nach (11) wegen } J_1(y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right)$ ist

$$\int_1^y Q(x)\,dx = O\left(y^{\frac{3}{4}}\right).$$

Daher ist

$$\int_1^y P^2(x)\,dx = \int_1^y Q^2(x)\,dx - 2\int_1^y Q(x)\,dx + \int_1^y dx = \beta y^{\frac{3}{2}} + O\left(y^{1+\varepsilon}\right).$$

Versuche über das Unterscheidungsvermögen der Bienen und Fische für Spektrallichter.

Von

Alfred Kühn.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. November 1923.

1921 haben Pohl und ich die Frage, ob die Bienen verschiedene Lichtwellenlängen zu unterscheiden vermögen, also Farbensinn besitzen, zum ersten Mal mit Spektrallichtern untersucht[1]). Wir dressierten Bienen mit Zuckerwasser auf Linien des Quecksilberspektrums und stellten zunächst fest, daß die Bienen die Linien 405 $\mu\mu$ (violett) und 436 $\mu\mu$ (blau) einerseits von den Linien 546 $\mu\mu$ (grün) und 578 $\mu\mu$ (gelb) andererseits unabhängig von ihrer Helligkeit unterscheiden. Dieses Ergebnis stimmte mit den Dressurversuchen K. v. Frischs auf Pigmentpapiere überein; er hatte gefunden, daß die Bienen Blau- und Purpurpigmente (Nr. 12—15 der Heringschen Skala) von den gelben und gelbgrünen Pigmenten (Nr. 3—7) unterscheiden und weder die einen noch die andern mit irgend einer Grauabstufung verwechseln. Unsere Versuche mit dem Linienspektrum zeigten weiter noch, daß die Bienen auch die Linie 492 $\mu\mu$ (blaugrün) von den übrigen Linien des Quecksilberspektrums und von unzerlegtem Licht unterscheiden, also nicht „rotgrünblind" sind, wie es nach Frischs Pigmentpapierversuchen den Anschein hatte, sowie, daß sie das ultraviolette Licht der Linie 365 $\mu\mu$ sehen und zwar als besondere Farbe, d. h. von den übrigen Spektrallinien und von unzerlegtem Licht jeder Helligkeit verschieden.

Ich habe die Versuche fortgeführt, um die Grenzen des Spektrums auf der langwelligen und kurzwelligen Seite, sowie die Verteilung der einzelnen Reizqualitäten innerhalb des Spektrums für das Bienenauge festzustellen.

Ich verwandte hierzu ein kontinuierliches Spektrum einer Kohlen-Bogenlampe, das durch ein Prisma aus Glas (Schott 0102) entworfen wurde. Für die Dressur wurden hieraus schmale Streifen

---

1) A. Kühn und R. Pohl, Dressurfähigkeit der Bienen auf Spektrallinien, in: Die Naturwissenschaften, 1921, Heft 37. — Vgl. ferner: A. Kühn, Zum Nachweis des Farbenunterscheidungsvermögens der Bienen, ebenda 1924, Heft 6.

ausgeschnitten, deren Bereich jeweils mit einem Spektroskop gemessen wurde. Wie 1921 wurde ein mit Zuckerwasser gefülltes Porzellanschiffchen auf den Lichtstreifen gesetzt und die Fütterungsstelle auf dem Versuchstisch häufig gewechselt, um Dressur auf einen bestimmten Ort zu vermeiden. Bei der Prüfung der Dressur ohne Futter verwandte ich nicht das ganze Spektrum, da in ihm die Bienenansammlungen nicht scharf genug begrenzt sind; sondern ich schnitt durch ein Gitter von parallelen Blendstreifen eine Reihe von Farbbändern heraus, die eine diskontinuierliche Leiter von Spektralfarben auf dem Versuchstisch bildeten. Durch Verschieben der ganzen Blende oder der einzelnen Stege konnten alle Wellenlängen in beliebiger Kombination zur Probe vorgelegt werden. Die Helligkeit des ganzen Spektrums konnte durch Gitterblenden, die einzelner Streifen durch Rauchglas variiert werden.

Ich schildere die Dressurerfolge vom langwelligen Ende beginnend. Die Grenze, bis zu welcher eine Dressur möglich ist, liegt etwa bei 650 $\mu\mu$, also in dem kurzwelligen Abschnitt unseres Rot. Wurde das Futterschälchen mit Licht von größerer Wellenlänge bestrahlt, so wurde es auch nach langem Füttern von den Bienen nur durch völlig planloses Umhersuchen gefunden. Wurde das Schälchen entfernt, so liefen sie, ohne anzuhalten, über den roten Lichtstreifen weg. Wellen über 650 $\mu\mu$ wurden also bei der Helligkeit meiner Lampe nicht mehr von den Bienen wahrgenommen. Bietet man den auf Rot 620—650 $\mu\mu$ dressierten Bienen eine Spektralleiter mit den Streifen: rot, gelb, grün, blaugrün, blau, violett, so befliegen sie heftig den gelben und den grünen Streifen, lassen aber das rote Dressurlicht unberücksichtigt. Vermindert man aber die Helligkeit des Gelb und Grün mehr und mehr, so wird das Rot angenommen und schließlich bevorzugt. Nach Dressur auf gelb (580—600 $\mu\mu$) wurde grün in gleicher Weise beflogen und umgekehrt gelb nach Dressur auf grün (520—560 $\mu\mu$). Wurde die Intensität der einzelnen Streifen erheblich gegeneinander abgestuft, so besuchten die Bienen innerhalb des Bezirks von 650—530 $\mu\mu$ jeweils den hellsten am stärksten, gleichgültig auf welcher Stelle dieses Spetralbereichs sie vorher Futter erhalten hatten. Innerhalb des Bereichs von 650—530 $\mu\mu$, der bei uns rot, gelb und grün umfaßt, werden also von den Bienen verschiedene Reizqualitäten nicht unterschieden; die verschiedenen Abschnitte wirken nur mit verschiedener Intensität, die oberhalb 600 $\mu\mu$ stark abfällt, zwischen 600—530 $\mu\mu$ im Spektrum aber nicht so stark verschieden ist, daß eine Wellenlänge wesentlich stärker anlockte.

Wenn die Dressur auf den für uns blaugrünen Bezirk 510—480 $\mu\mu$ erfolgt, so sammeln sich die Bienen in der Spektralleiter nur in diesem Bezirk. Wird dieser fortschreitend verdunkelt oder völlig aus dem Spektrum herausgeblendet, so fliegen die auf 510—480 $\mu\mu$ dressierten Bienen zögernd und unsicher die angrenzenden Wellenlängen bis etwa 530 und 460 $\mu\mu$ an; auf andere Farbstreifen lassen sie sich aber nicht drängen. In dem Spektralgebiet 510—480 $\mu\mu$ liegt also eine 2. Reizqualität; schmale angrenzende Streifen sind Übergangsgebiete zu den Nachbarfarben.

Füttern wir die Bienen auf einem Streifen aus dem Bereich, der unser blau und violett umfaßt, so wird hernach der ganze Bezirk 470—400 $\mu\mu$ beflogen. Werden mehrere Streifen hieraus geboten, so wird kein regelmäßiger Unterschied zwischen dem Dressurlicht und einer andern Wellenlänge dieses Bereichs gemacht. Sobald man aber den Streifen wesentlich verschiedene Helligkeit erteilt, erhält der hellste den stärksten Besuch. Von 470—400 $\mu\mu$ erstreckt sich also eine 3. Reizqualität.

Jenseits von 400 $\mu\mu$ im Ultraviolett beginnt die 4. Reizqualität. Die auf die Linie 365 $\mu\mu$ des Quecksilberspektrums dressierten Bienen fliegen in einer Leiter des kontinuierlichen Spektrums bis nahe an die Violettgrenze heran, aber nicht in den Bezirk über 400 $\mu\mu$ hinein. Etwas über 300 $\mu\mu$ liegt bei der Helligkeit meiner Quecksilberlampe die Grenze der Sichtbarkeit für das Bienenauge. Wurde das Futterschälchen mit der Linie 313 $\mu\mu$ bestrahlt, so war der Anflug der Bienen schon recht unsicher. Wurde darauf 365 $\mu\mu$ des Hg-Spektrums oder Streifen des kontinuierlichen Spektrums geboten, so wurde das Ultraviolett von größerer Wellenlänge stark beflogen. Die Strahlung von 313 $\mu\mu$ ist also eben noch wirksam und zwar mit der gleichen Reizqualität wie das Gebiet bis 400 $\mu\mu$.

Wir können also zwischen 650 $\mu\mu$ und 300 $\mu\mu$ für das Bienenauge vier verschiedene Reizqualitäten feststellen, die scharf von einander unterschieden werden. Die 1., 3. und 4. erstrecken sich über breite Bezirke von Wellenlängen, die 2. nimmt nur einen sehr schmalen Abschnitt des Spektralbandes ein. Der ganze für das Bienenauge sichtbare Strahlungsbereich ist gegenüber dem menschlichen Auge nach der kurzwelligen Seite hin verschoben. In der Verteilung der Reizqualitäten innerhalb jenes Bereichs spricht sich aber eine merkwürdige Ähnlichkeit mit der Verteilung der Farben im Spektrum des Menschen aus, in dem ebenfalls die 2. Reizqualität, das Gelb, nur geringe Ausdehnung hat, während die anderen Hauptfarben viel breitere Bezirke ein-

nehmen. In beiden Fällen liegt der höchste Grad des Unterscheidungsvermögens für Wellenlängen, also der rascheste Wechsel verschiedener Reizqualitäten im Spektrum, in der Gegend des Spektrums, welche den größten Helligkeitswert hat. Für das farbentüchtige Menschenauge erscheint das Spektrum (des Sonnenlichts oder eines Lichts von ähnlicher Energieverteilung) etwa bei 600 $\mu\mu$ am hellsten; für die Bienen liegt, entsprechend der Verschiebung der ganzen Empfindlichkeit in kurzwelligere Bereiche, auch das Helligkeitsmaximum näher bei 500 $\mu\mu$, wie C. Heß durch Phototaxisversuche gezeigt hat.

Nachdem es gelungen war, den viel umkämpften Farbensinn der Bienen durch Dressur auf Spektrallichter befriedigend aufzuklären, schien es mir erwünscht, mit der selben Methode auch den Streit zu entscheiden, ob die Fische verschiedene Wellenlängen unabhängig von ihrer Helligkeitswirkung unterscheiden, also Farben sehen, wie K. v. Frisch und andere darlegten, oder total farbenblind sind, wie C. v. Heß nachdrücklich behauptete. Herr Schiemenz hat in meinem Institut diese Aufgabe übernommen und sehr glücklich gelöst.

Als Hauptobjekt der Versuche diente die Ellritze (Phoxinus laevis). Die Fische erhielten Futter, Regenwurmstückchen, an der Spitze eines Stabes, der mit einem schmalen Spektralausschnitt beleuchtet wurde. Um die Weißverhüllung durch das Tageslicht zu vermindern, ohne den Fisch ins Dunkle zu bringen, wurde an der Fensterseite des Glaskastens, in dem sich der Fisch befand, über dem Wasserspiegel ein schwarzer Schirm aufgestellt. Vor diesem dunkeln Hintergrund wird der Stab herabgesenkt. Um die Bewegungen des Stabes von der Willkür des Beobachters unabhängig zu machen, wird er durch ein Uhrwerk bis zum Wasserspiegel heruntergelassen. Nach einiger Zeit der Gewöhnung nimmt der Fisch das Futter rasch von dem etwas eingetauchten Stabe ab, und springt schließlich nach der das Futter tragenden Stabspitze aus dem Wasser in die Höhe. Bietet man dem so dressierten Fisch nun den Stab in der Dressurfarbe ohne Futter, so schnappt er ebenso heftig. Er reagiert dabei nicht nur auf die Lichtintensität, bei der er gefüttert wurde, sondern auch auf alle geringeren Intensitäten der Dressurwellenlänge, bis die Intensität so weit gesunken ist, daß auch der Beobachter eine Färbung nicht mehr sicher feststellen kann. Beim Violett geht das Wahrnehmungsvermögen des Fisches für die Farbe zu bedeutend niedereren Intensitäten als das des menschlichen Auges. Darin spricht sich aus, daß der Helligkeitswert

des kurzwelligen Lichtes für das Fischauge höher ist als für unser Auge.

Wird nun der sich herabsenkende Stab mit anderen als den Dressurwellenlängen beleuchtet, so schnappt der Fisch, wenn er noch nicht sehr lange dressiert und hungrig ist, auch bei den unmittelbar der Dressurfarbe benachbarten Farben; z. B. ein auf rot dressierter Fisch schnappt auch auf gelb, ein auf gelb dressierter auch auf rot und grün, ein auf blau dressierter auch auf grün und violett. Es zeigt sich hieraus, daß für den Fisch die jeweiligen Nachbarfarben einander ähnlich erscheinen. Daß sie für ihn aber nicht gleich sind, zeigt schon das geschilderte Verhalten: Wenn nämlich der auf rot dressierte Fisch noch auf gelb schnappt, nicht mehr aber auf grün, so muß er zwischen gelb und grün unterscheiden; wenn der auf grün dressierte auf gelb, nicht mehr aber auf rot reagiert, so können auch diese Nachbarfarben für ihn nicht gleich sein. Bei längerer Dressur und bei zunehmender Sättigung nimmt auch die Wirkung der Nachbarfarben gegenüber der Dressurfarbe bedeutend ab. Dabei fällt auf, daß im langwelligen Gebiet (rot-gelb-grün) die Nachbarfarben für den Fisch sich mehr, im kurzwelligen (blau-violett) weniger ähneln als für den Menschen.

Daß der Fisch rot, gelb, grün, blau und violett sicher zu unterscheiden vermag, zeigt sich am deutlichsten, wenn man ihm alle Spektralfarben im kontinuierlichen Spektrum zugleich vorlegt. Die dressierten Ellritzen schwimmen sofort auf das Spektrum zu, das ihnen auf einer Wand ihres Behälters über dem Wasserspiegel ohne Stab und Futter geboten wird, und schnappen lebhaft an der Stelle in die Luft, wo sich der Streifen der Dressurfarbe befindet. Wird das Spektrum verschoben, so folgen sie ihrer Dresurfarbe, ohne irgend eine andere Spektralfarbe zu berücksichtigen. Verringert man die Intensität der Spektralfarben, so schnappt der Fisch doch nur bei seiner Dressurfarbe, nie bei einer andern. Die Dressur ist also an den bestimmten Farbwert, unabhängig von der Helligkeit, geknüpft. Dementsprechend reagiert der auf eine bestimmte Spektralfarbe dressierte Fisch auch auf keine Helligkeit des unzerlegten Lichts.

Der relativ hohe Helligkeitswert, den das Violett für das Fischauge hat, legt es nahe, auch die Wirkung ultravioletten Lichts zu prüfen. Es zeigte sich in der Tat, daß eine auf violett dressierte Ellritze auch schnappt, wenn man ihr anstatt dessen einen Streifen des ultravioletten Lichts der Linie 365 $\mu\mu$ des

Quecksilberspektrums bietet. Wurde der Fisch nun auf diese Wellenlänge dressiert, so schnappte er im kontinuierlichen Spektrum am äußersten kurzwelligen Ende des Spektrums, außerhalb des für uns sichtbaren Bereichs. Ultraviolett wird also auch von Violett unterschieden; und zwar wirkt das Ultraviolett offenbar nicht nur als eine bestimmte Intensität des Violett, sondern als besondere Reizqualität. Denn bietet man dem Fisch neben seiner ultravioletten Dressurwellenlänge kontinuierlich variierte Stufen des Violett, so zieht er jenes durchaus vor. Auf die Linie 313 $\mu\mu$ war keine Reaktion mehr zu erhalten.

Diese Versuche zeigen, daß der Farbensinn der Fische sehr wohl entwickelt ist. Die Verteilung einzelner Reizqualitäten über das Spektrum ähnelt der bei höheren Wirbeltieren und beim Menschen; nur erstrekt sich die Empfindlichkeit in Strahlungsbereiche von kleinerer Wellenlänge als bei uns. In dieser Hinsicht werden die Fische von den Bienen ja noch übertroffen; der Gesamtbereich der Strahlung, der mit dem Auge aufgenommen wird, ist bei den Fischen aber größer; denn wir konnten bei ihnen nicht wie bei den Bienen eine erhebliche Verkürzung gegenüber dem Menschenauge am langwelligen Ende feststellen.

Weitere Versuche sollen den Fragen gewidmet sein, ob Bienen und Fische bei entsprechender Versuchsanordnung in den Übergangsgebieten zwischen den Hauptqualitäten noch feinere Farbennüancen zu unterscheiden vermögen, ferner, wie Mischungen von Wellenlängen auf ihre Augen wirken, und ob für sie wie für uns ein geschlossener Farbenkreis besteht.

Scheinbar deformierte Krystalle und Gesteinsschieferung.

Mit 1 Figur.

Von

O. Mügge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Dezember 1923.

Aus dem Salzton kennt man seit längeren Jahren regelmäßig begrenzte Individuen von Steinsalz die dadurch auffallen, daß sie Parallelopipede bilden deren Flächen sich nicht unter 90° sondern unter wechselnden Winkeln etwa zwischen 90—50° schneiden, sodaß man sie bei flüchtiger Betrachtung für deformierte Würfel halten möchte, zumal der kürzeste Durchmesser der Parallelopipede meist senkrecht zur Schichtung des Tones liegt. Indessen wurde schon von E. Weiß (1873) bemerkt, daß diese schiefen, anscheinend aus Würfeln hervorgegangenen Parallelopipede gleichwohl noch nach ebenen Flächen und zwar mit Winkeln von 90° wie gewöhnliches Steinsalz spalteten, sodaß manche Beobachter geneigt waren, sie für Pseudomorphosen etwa nach Hohlformen früher vorhandener deformierter, dann aber aufgelöster Würfel von Steinsalz oder nach Dolomit und anderen Mineralen zu halten. Dem widerspricht aber die Tatsache, daß manche solche Steinsalzindividuen Anwachsstreifen nach Flächen erkennen lassen, die ebenfalls unter schiefen Winkeln sich schneiden.

Da manche Krystalle durch reine Translation eine Deformation nur ihrer Gestalt erfahren können, d. h. so, daß die krystallographische Orientierung im physikalischen Verhalten keine Änderung erfährt ($BaBr_2 \cdot 2H_2O$, Eis I), hat man geglaubt, dies auch für dieses Steinsalz annehmen zu dürfen, aber Steinsalz hat nicht wie jene Krystalle nur e i n e Translations-Ebene und -Richtung, sondern deren je 6, sodaß ein Krystall auch wenn er (zufällig!) gerade so im Ton läge, daß er in der Richtung e i n e r Translation beansprucht würde, dabei doch nach den anderen 5 Ebenen nicht nur Translation sondern auch Biegung erfahren würde. Görgey, der solche Krystalle von dem Vorkommen von Wittels-

heim im Oberelsaß zuerst einer genaueren, auch mikroskopischen Untersuchung unterwarf, machte in der Tat eine Beobachtung die Deformation unter bloßer Translation ausschloß. Er fand, daß die schiefen Parallelopipede nicht allein noch nach rechten Winkeln spalteten, sondern im Kern auch Anwachszonen nach aufeinander rechtwinkligen Ebenen zeigten, ebenso Mutterlaugeneinschlüsse mit zu einander rechtwinkligen, nicht deformierten Wandungen. Er hielt daher die Form für eine Wachstumsanomalie, die dadurch veranlaßt sein sollte, daß den Keimwürfeln die Nährlösung hauptsächlich längs den Schichtfugen des Tones, viel weniger reichlich senkrecht dazu zugeführt wäre und daß der Krystall in der Richtung der Schichtungsfugen beim Wachsen auch viel weniger Widerstand gefunden hätte als in der Richtung senkrecht dazu.

Nun sind in den Tonen die Schichtungsfugen meist wenig deutlich, aber auch wenn sie gut entwickelt wären und man annehmen wollte, daß sie einen solchen Einfluß auf das Wachstum haben könnten, bliebe zunächst unerklärt, weshalb sich diese Wachstumsanomalie nicht auch schon in dem vielfach deutlich würfligen Kernkrystall bemerkbar machte, obwohl dieser sich doch in demselben geschichteten Ton entwickelte, ferner aber wäre zu erwarten, daß zwar die Durchmesser der Individuen parallel der Schichtung größer wären als senkrecht dazu, daß aber nur eine Verzerrung im gewöhnlichen krystallographischen Sinne die Folge gewesen wäre, nämlich unter Erhaltung der Neigungswinkel der ebenen Flächen (mit einer elliptischen Begrenzung in der Richtung senkrecht zur Schichtung), ferner wäre es unverständlich, daß manche Individuen Anwachszonen zeigen, deren Winkel vom Kern des Krystalls nach außen hin immer mehr von 90° abweichen, es sollten vielmehr die Anwachszonen, ebenso wie die Winkel der äußeren Flächen konstant bleiben. Der im Habitus der Individuen so deutlich angezeigte Zusammenhang mit der Schichtung des Tones der den Eindruck deformierter Krystalle aufkommen läßt, muß daher einen andern Grund haben.

Eine nähere Überlegung zeigt, daß in der Tat eine Deformation stattgefunden hat, aber nicht des Steinsalzes, sondern des Tones. Da das Steinsalz im Ton gewachsen ist, war dieser von gesättigter Salzlösung durchdrungen, also feucht und plastisch; so plastisch, daß das Steinsalz sich ihm gegenüber wie ein starrer Körper verhielt. Nimmt man an, daß er dabei so zähe war, daß die Cohäsion zwischen seinen Teilchen seine Adhäsion am Steinsalz übertraf, so mußte sich bei der Pressung des Tones, etwa durch die Schichten im Hangenden, folgender Vor-

gang abspielen: Für ein Steinsalzindividuum das von seinen Nachbarn so weit entfernt war, daß die Bewegung des Tones in seiner Nähe unabhängig von jener um die nächst benachbarten Steinsalzwürfel sich vollzog, (Fig. 1) erfuhr das Schichtpaket zwischen der obersten und untersten Spitze des Steinsalzkrystalles in der Vertikalen VV_1 keine Compression, da zwischen V und V_1 nur Steinsalz lag, in der Vertikalen $V' V_1'$ dagegen das Maximum von Compression; dem entsprechend wich der Ton längs der Schichtebene an den Spitzen bei V und V_1 gar nicht seitwärts aus, bei B dagegen erreichte das seitliche Ausweichen sein Maximum. Der Ton löste sich dadurch vom Steinsalz ab, es entstand der Hohlraum $V B V_1 B'$; in diesen konnte das Steinsalz, das, so lange der Ton nicht in Bewegung gekommen war, regelmäßige Würfel gebildet hatte, hineinwachsen, vorausgesetzt, daß die Nährlösung dauernd übersättigt blieb (etwa durch Verdunstung von Wasser von der Oberfläche her, oder durch Temperaturänderung oder Zutritt von Salzen mit gleichem Jon (KCl, $MgCl_2$). Je länger die Compression des Tones andauerte und der Ton seitwärts auswich, um so spitzer konnte der Winkel bei B' werden und dementsprechend konnten sich auch durch Einschlüsse usw. markierte Anwachszonen bilden, die von der Würfelform abwichen.

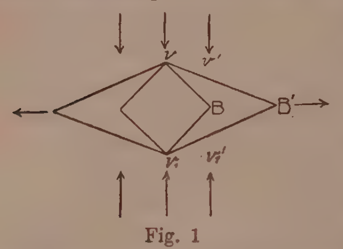


Fig. 1

Eine weitere Voraussetzung dabei aber ist, daß in dem Hohlraum inzwischen nicht andere Krystallkeime von Steinsalz zur Entwicklung kamen; das konnte dadurch verhindert werden, daß das Fließen des Tones langsamer erfolgte als das Wachsen des Steinsalzes. Dies kann man unbedenklich annehmen (wenn dauernde Übersättigung für Steinsalz bestand) und dann konnte das Steinsalz immer dem weichenden Ton nachwachsend dauernd mit ihm in Berührung bleiben, sodaß zu keiner Zeit klaffende Hohlräume am Steinsalz vorhanden waren.

Die Bildung dieser scheinbar deformierten Steinsalzwürfel beruht also auf dem Ineinandergreifen sehr verschiedenartiger, nämlich mechanischer und chemischer Vorgänge und setzt für beide ein gewisses Geschwindigkeitsverhältnis voraus, ferner für das Steinsalz geringe Plastizität, für den Ton große, bei gleichzeitiger erheblicher Cohäsion.

Die Bedeutung dieses Vorganges liegt darin, daß er eine nahezu experimentelle Bestätigung liefert für Vorgänge, die

bei der Entstehung der Gesteinsschieferung eine große Rolle spielen, und in diesen Nachrichten[1]) kurz angedeutet wurden.

In dem Salzwürfelton liegt ein Aggregat vor von einem weniger plastischen Mineral in einem viel plastischeren Zwischenmittel. Ganz ähnlich wie dieses wird sich gegenüber Pressungen namentlich auch der gewöhnliche (unreine) Ton verhalten, in welchem die eingemengten sehr feinen Quarzkörner die Rolle des Steinsalzes, ganz oder z. T. übernehmen. Wenn das Tonsediment, etwa nach seiner Aufrichtung, dem gewaltigen Seitenschub benachbarter Schollen der Erdkruste unterliegt, wird um jedes Körnchen von Quarz, der gar nicht plastisch ist, ein linearer Streckungs- oder flächenförmiger Schieferungshof entstehen, in den nun diejenigen Neubildungen hineinwachsen können, die infolge der Versenkung der Erdscholle in höhere Temperatur- und Druckregionen möglich werden. Sind diese derart, daß Quarz neu gebildet wird, so werden die kleinen, mehr oder weniger rundlichen Quarzkörnchen zu kleinen Täfelchen nach der Ausweiche-Ebene (Schieferungsebene) des Tones auswachsen, wie sie in manchen krystallinischen Schiefern beobachtet sind. Ob dabei die Tafelebene der Quarze eine krystallographisch bestimmte ist, wird davon abhängen, ob unter den Wachstumsrichtungen des Quarzes eine durch besonders große oder kleine Geschwindigkeit ausgezeichnete ist. Die Schieferungsvollkommenheit derartiger Gesteine (Zahl der Fugen auf die Längeneinheit) wird immer nur gering sein, nämlich gleich der Zahl der Quarzplättchen für die Längeneinheit senkrecht zur Ausweicherichtung, denn durch die einzelnen Quarztäfelchen hindurch wird keine Absonderung möglich sein.

Viel öfter wird aber der Fall eintreten, daß in der neuen Temperaturdruckstufe in die die Scholle gelangt ist, die Neubildung von Kaliglimmer besonders begünstigt ist, denn Tone haben die Eigenschaft Kalisalze vor andern festzuhalten. Dann werden vom Ton aus in die Streckungs- oder Schieferungshöfe um die Quarzkörner Kryställchen von Kaliglimmer hineinwachsen. Diese haben die Fähigkeit nach einer Fläche höchst vollkommen zu spalten und es ist anzunehmen, daß auch die Richtungen größter Krystallisationsgeschwindigkeit bei ihnen in dieser Spaltfläche liegen. Unter allen Keimen von Kaliglimmer die in die Höfe hineinwachsen werden daher diejenigen im Laufe der Zeit überhandnehmen deren Spaltflächen zufällig senkrecht zur Pressung, in der Ebene der Höfe liegt. Die Glimmerblättchen werden daher

1) Geschäftliche Mitteilungen 1919 p. 78.

je länger die Pressung andauert alle einander parallel liegen und es wird ein Gebilde entstehen, das Teilbarkeit nach der Ebene senkrecht zur Pressung nicht nur deshalb zeigt, weil ihr parallel die Grenzflächen der einzelnen Glimmerkryställchen liegen, und nicht nur nach diesen Ebenen, sondern in dem die Teilbarkeit auch nach allen Parallelebenen, in jedem Niveau, möglich ist, indem die molekulare höchst vollkommene Spaltbarkeit der Glimmerblättchen nach ihren Ebenen (001) nun auch dem Gestein zugute kommt.

Wenn die Fließgeschwindigkeit des Tones zwischen der größten und kleinsten Wachstumsgeschwindigkeit des Kaliglimmers liegt, wird die Unterdrückung der nicht mit der Ebene (001) parallel der Fließebene gelagerten Glimmerkryställchen am vollkommensten erreicht werden, weil letztere dann am ehesten von den parallel der Fließebene gelagerten benachbarten überflügelt werden. Es ist anzunehmen, daß die obere und untere Grenze der Wachstumsgeschwindigkeiten bei Glimmerkrystallen (und anderen sehr vollkommen nach nur e i n e r Ebene spaltenden Krystallen), besonders weit auseinander liegen. Der Ton mit seiner Vorliebe für Neubildung von Glimmer scheint also zur Bildung von Schiefergesteinen wie geschaffen.

Über die Transformation Liouville'scher Mannigfaltigkeiten.

Von

O. Haupt in Erlangen und **E. Hilb** in Würzburg.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 7. Dezember 1923.

Die von Stäckel aufgeworfene Frage nach mechanischen Systemen bei denen sich die Hamilton'schen Gleichungen durch „Separation" der Veränderlichen lösen lassen, führt auf eine bestimmte Klasse von n-dimensionalen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten bzw. Linienelementen $ds^2 = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}(du_k)^2$, die wir als „Stäckel'sche" bezeichnen wollen[1]). Dall' Acqua hat als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ds^2 ein Stäckelsches Linienelement ist, ein System partieller Differentialgleichungen angegeben, welchen die A_{kk} genügen[2]). („A-Bedingungen").

Ist jetzt irgend ein reelles Linienelement $\sum_{i,k} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ vorgelegt, so erhebt sich die Frage, ob es durch Einführung passend gewählter neuer Koordinaten in ein Stäckel'sches übergeführt werden kann und weiter, auf wieviel verschiedene Arten dies möglich ist. Zur Lösung der Aufgabe hat man die A-Bedingungen in invariante Gestalt zu setzen und nach der Methode von Ricci[3]) zu behandeln.

Dies soll im folgenden zunächst für $n \geqq 3$ und für den speziellen Fall der sogenannten Liouville'schen Linienelemente

$$ds^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} f_j(u_j)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} (du_k)^2\right)$$

---

1) Stäckel, P., Über die Integration der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung mittelst Separation der Variablen (Hab.-Schrift, Halle, 1891).

2) Dall' Acqua, Le equazioni di Hamilton-Jacobi che si integrano per separazione di variabili (Rend. Circolo mat. Palermo, 33 (1912), S. 341—351).

3) Ricci, G. und Levi-Civita, T., Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications (Math. Ann. 54 (1901), S. 125—201).

durchgeführt werden, da sich für diese speziellen Stäckel'schen Linienelemente die Verhältnisse besonders übersichtlich gestalten[1]).

Berechnet man für ein Liouville'sches Linienelement die geodätischen Krümmungen γ_{hik} der Koordinatenlinien

$$\mathfrak{R}_h \{u_i = \varphi_i(t) = \delta_{hi} . t\} \quad (h, i = 1, \ldots, n)^{2)},$$

so findet man, daß sie die „*G*-Bedingungen“ erfüllen d. h. es ist

$$\gamma_{hii} = -\gamma_{ihi} = g_h$$

bei festem h für alle $i \neq h$ $(i, h = 1, 2, \ldots, n)$, während alle übrigen geodätischen Krümmungen Null sind. Dies sind charakteristische Bedingungen für eine euklidisch-konforme Mannigfaltigkeit[3]).

Umgekehrt zeigt sich, daß ein Stäckel'sches Linienelement immer dann speziell ein Liouville'sches ist, wenn die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien die G-Bedingung erfüllen.

Es bedeute (L) ein vorgelegtes, reelles, positiv definites Linienelement $ds^2 = \sum_{i,k} a_{(ik)} dx_i dx_k$. Aus den G-Bedingungen folgt[3]): Damit (L) in ein Liouville'sches Linienelement transformierbar sei, ist notwendig, daß der Riemann'sche Krümmungstensor $a_{(rs,\, tq)}$ die folgende Darstellung gestatte:

$$(Z) \qquad a_{(rs,\, tq)} = a_{(rt)} \zeta_{(sq)} + a_{(sq)} \zeta_{(rt)} - a_{(rq)} \zeta_{(st)} - a_{(st)} \zeta_{(rq)},$$

wobei

$$\zeta_{(sq)} = \frac{1}{n-2} \left[\left(\sum_{rt} a_{(rs,\, tq)} a^{(rt)} \right) - \frac{a_{(sq)}}{2(n-1)} \left(\sum_{rstq} \left(a_{(rs,\, tq)} a^{(rt)} a^{(sq)} \right) \right) \right] = \zeta_{(qs)}.$$

Bezeichnet man ferner mit $\lambda_{h(j)}$ bzw. $\lambda_h^{(j)}$ die kovarianten bzw. kontravarianten „Richtungskosinus“[4]) der gesuchten neuen Koordinatenlinien $\mathfrak{R}_h$, mit g_h deren geodätische Krümmungen, soweit sie nicht Null sind, so muß die kovariante Ableitung $\lambda_{h(j|k)}$ von $\lambda_{h(j)}$ nach x_k sich so darstellen:

$$(A) \qquad \lambda_{h(jk)} = g_h a_{(jk)} - \lambda_{h(k)} D_{(j)},$$

1) Für den Fall $n = 2$ ist die Aufgabe gelöst von G. Ricci, Dei sistemi di coordinate atti a ridurre la espressione del quadrato dell' elemento lineare di una superficie alla forma $ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2)$ (Atti d. Reale Acc. dei Lincei, Serie V, Rendiconti, scienze fisiche etc. Vol. II, 1. semestre, 1893, S. 73—81).

2) $\delta_{hi} = 0$ für $h \neq i$; $\delta_{hh} = 1$.

3) Für die Theorie dieser Mannigfaltigkeiten vgl. Schouten, J. A., Über die konforme Abbildung usw. (Math. Ztschr. 11 (1921), S. 58—88).

4) Bei Ricci—Levi-Civita, l. c.[3]), S. 145 bezeichnet als système coordonné covariant bzw. contrevariant.

wobei

$$D_{(j)} = \sum_{\varrho=1}^{n} \lambda_{\varrho(j)} g_{\varrho}$$

gesetzt wird.

Aus ($\varDelta$) ergibt sich rückwärts durch zweimalige Faltung mit $\lambda_r^{(j)}$ bzw. $\lambda_s^{(k)}$, daß die G-Bedingungen erfüllt sind, ferner daß die $\mathfrak{R}_h$ kanonische Kongruenzen liefern ($h = 1, \ldots n$).

Unter Benutzung von (Z) und ($\varDelta$) liefern die G-Bedingungen

$$(D) \qquad D_{(j/\tau)} + D_{(j)} D_{(\tau)} + \zeta_{(j\tau)} = \tfrac{1}{2} a_{(j\tau)} \sum_{\mu\nu}^{1,\ldots n} a^{(\mu\nu)} D_{(\mu)} D_{(\nu)}.$$

Dabei bezeichnet $D_{(j/\tau)}$ die kovariante Ableitung von $D_{(j)}$ nach x_τ.

(D) ist ein System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung in den D_j. Die Integrabilitätsbedingung für (D) ist

$$\zeta_{(j\tau/\varrho)} = \zeta_{(j\varrho/\tau)},$$

wo $\zeta_{(j\varrho/\tau)}$ die kovariante Ableitung von $\zeta_{(j\tau)}$ nach x_ϱ bedeutet.

Hat man eine Lösung D_j^* von (D) gefunden, so bestimmen sich die $\lambda_h^{(j)}$ durch Auflösung des Gleichungensystems (A-Bedingungen)

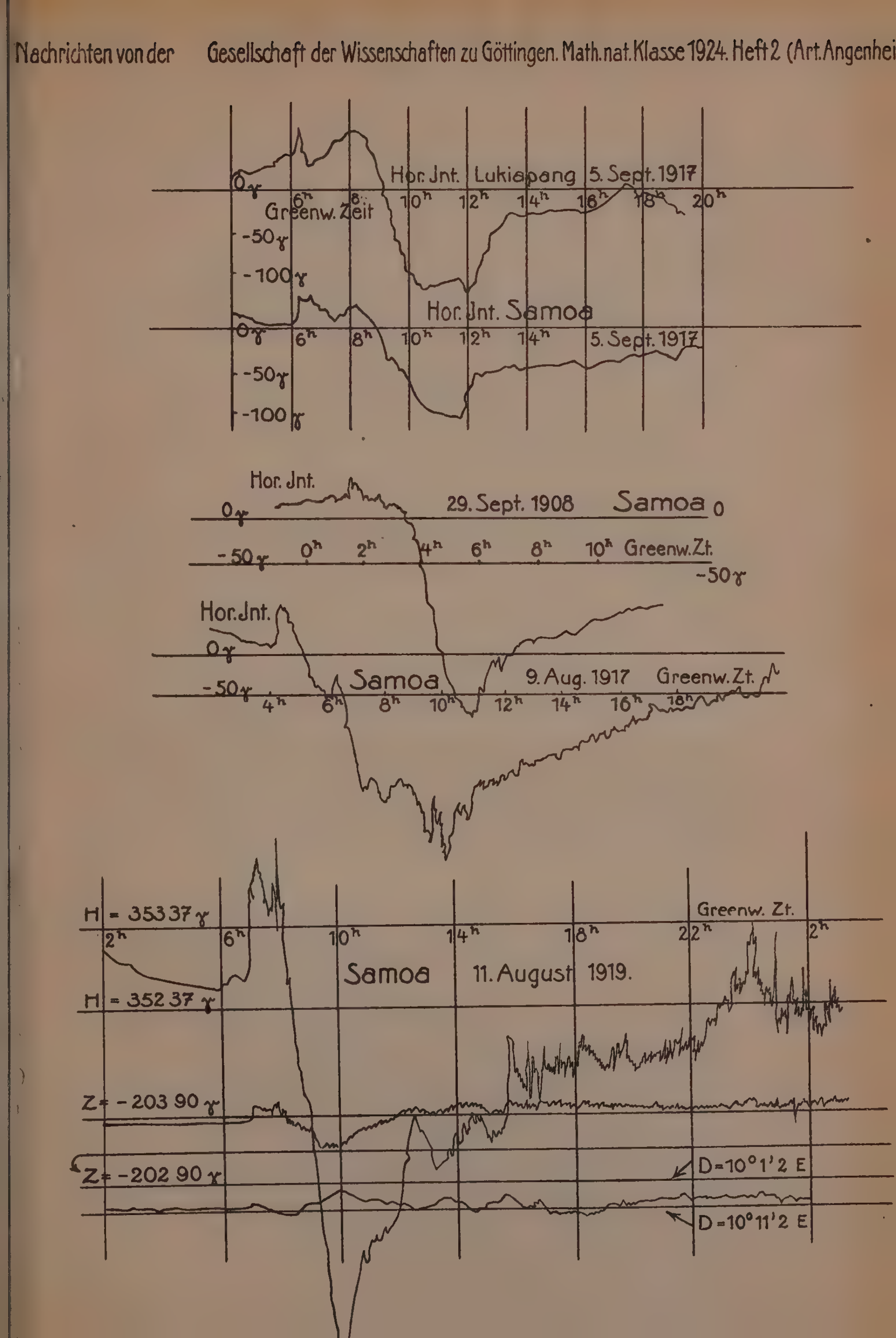
$$(K) \qquad \sum_{j=1}^{n} [-\zeta_{(j\tau)} + 3 D_{(j)} D_{(\tau)} - a_{(j\tau)} X_h] \lambda_h^{(j)} = 0, \quad \tau, h = 1, 2, \ldots, n.$$

Die X_h sind folglich die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades vom Typus der Säkulargleichung. Nach Bestimmung der X_h berechnet man die $\lambda_h^{(j)}$ aus (K); sie liefern ein n-faches Orthogonalsystem.

(Z), (D), (K), ($\varDelta$) liefern zusammen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Transformierbarkeit von (L) in ein Liouville'sches Linienelement.

Kennt man e i n e Lösung von (D), so lassen sich (D) und ($\varDelta$) explizit integrieren, womit vermöge (K) die Frage nach der Gesamtheit der möglichen Transformationen auf eine rein algebraische zurückgeführt ist.

Die Durchführung dieser algebraischen Diskussion, der Kernpunkt des vorliegenden Problems, wird an anderer Stelle ausführlich veröffentlicht werden, zugleich als Vorarbeit für die Behandlung des allgemeinen Stäckel'schen Falles.



Hor. Jnt. Lukiapang 5. Sept. 1917
0γ
Greenw. Zeit
-50γ
-100γ
6h 8h 10h 12h 14h 16h 18h 20h
Hor. Jnt. Samoa
5. Sept. 1917
0γ
-50γ
-100γ
Hor. Jnt.
29. Sept. 1908
Samoa
0
-50γ
0h 2h 4h 6h 8h 10h Greenw. Zt.
-50γ
Hor. Jnt.
0γ
Samoa
9. Aug. 1917
Greenw. Zt.
-50γ
4h 6h 8h 10h 12h 14h 16h 18h
H = 35337γ
H = 35237γ
2h 6h 10h 14h 18h 22h 2h
Greenw. Zt.
Samoa
11. August 1919.
Z = -20390γ
Z = -20290γ
D = 10°1'2 E
D = 10°11'2 E

Die luftelektrischen Beobachtungen am Samoa-Observatorium 1914—1918.

Von

G. Angenheister.

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung vom 22. Februar 1924.

Vorwort.

Dieser Bericht bezieht sich auf die Registrierungen des Potentialgefälles mittels der Benndorfschen Registriereinrichtung während der Zeit von Oktober 1914 bis 1918. Der Bericht schließt sich an die folgenden an:

G. Angenheister: Luftelektrische Beobachtungen am Samoa-Observatorium, 1906—8, Abhandl. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, IX. 2.

K. Wegener und M. Hammer: Luftelektrische Beobachtungen am Samoa-Observatorium, 1909—Mai 1911, Abhandl. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, IX. 3.

G. Angenheister, Luftelektrische Beobachtungen am Samoa-Observatorium, 1912—13, Nachrichten d. Ges. d. Wiss. Göttingen 1914.

In den Monaten November 1913 bis Mai 1914 sind sehr sorgfältige Beobachtungen von L. Geiger angestellt worden. Die Monatsmittel und der tägliche Gang dieser Monate sind in den Tabellen am Schluß beigefügt.

Von November 1914—Mai 1917 sind die luftelektrischen Arbeiten gemeinsam von G. und E. Angenheister, von Juni 1917 ab von E. Demandt, ausgeführt worden.

Aufstellung.

Seit 1906 hat die Aufstellung mehrfach gewechselt. Sie war 1906—11 im oberen Stockwerk des Hauptgebäudes; die Sonde befand sich damals etwa 8 m über dem Erdboden an der Westseite, 1912/13 im unteren Stockwerk des Hauptgebäudes; die Sonde befand sich dort etwa 5 m über dem Erdboden an der Westseite.

November 1913 wurde die Aufstellung von L. Geiger in eine isoliert stehende Hütte verlegt. Die Sonde befand sich seitdem

etwa 2 m über dem Erdboden an der Nordostseite. Diese Aufstellung ist unverändert beibehalten.

Zu Vergleichungen wurden für kurze Zeit provisorische Aufstellungen an anderen Orten vorgenommen, so von Wegener 1911 auf einer Riffinsel, von Angenheister 1915 auf dem 15 m hohen Holzturm; von Demandt wurde 1917 eine zweite Sonde, erst an der Südwand und dann an der Westwand der Hütte angebracht. Über den Einfluß der Aufstellung wird weiter unten eingehend berichtet.

Als Sonde wurde die 1912 in Benutzung genommene Joniumelektrode gebraucht. Die Isolationsstörungen durch Spinnenfäden wurden durch eine von Geiger eingeführte Einrichtung sehr wirksam bekämpft. Mittels eines Uhrwerks wurde stündlich einmal die Elektrode rotiert. Angesponnene Fäden wurden dadurch zerrissen und die Isolation wiederhergestellt.

Die Aichung des Quadrantelektrometers geschah mittels des Wiechertschen Quarzfadenelektrometers, das seinen Skalenwert seit 1911 gut bewahrt hat, wie gelegentliche Aichungen zeigten. Die Quadrantenbatterie (Calomel-Elemente) mußte 1914, 1916 und 1917 erneuert werden.

Der bei der Registrierung benutzte Skalenwert war Ende 1914 etwa 1 mm = 5 Volt; Anfang 1915 bis Anfang 1917 etwa 1 mm = 9 bis 10 Volt. Seit Mitte 1917 1 mm = 6 Volt. Um ein Urteil über die Wirkungsweise der Joniumsonde des Benndorfschen Registrierapparates zu gewinnen, wurde die Halbwertsladezeit bestimmt. Diese ist hoch, sie betrug rund 1.5 min.

Ferner wurden Isolationsproben, bei abgenommener Sonde angestellt. Da der Sondenträger sich dabei im normalen luftelektrischen Felde befand, zerstreute sich eine künstliche positive Aufladung viel langsamer als eine negative. Die positive Aufladung fiel z. B. am 25. Nov. 1914. 10^a in $8\frac{1}{2}$ min. um 11 % (von 78 auf 70 Volt); die negative in $8\frac{1}{2}$ min. um 52 % (von -71 auf -34 Volt). Die positive Ladung fiel bis zum halben Wert des Luftpotentials, bei dem sie konstant blieb. Der Elektrizitätstransport von dem Sondenträger (ohne Sonde) dauert solange an als das halbe Luftpotential größer ist als das Sondenpotential. Ebenso ladet sich der Sondenträger ohne Sonde bis zum halben Luftpotential auf[1]). Ohne Sondenträger verlor das Quadrantenelektrometer in 18 min. etwa 8 %, von 90 auf 82.5 Volt, negative und positive Ladung natürlich gleich schnell.

Besondere Sorgfalt wurde auf eine genügende Isolation ver-

1) Näheres über diese Vorgänge siehe Anhang. (Wirkung des Regens auf die Registrierung des Potentialgefälles.)

wendet. Als Sondenträger und zur Isolation der Quadranten und der Nadelaufhängung im Elektrometer wurde nur hochpolierter klarer Bernstein verwendet. Häufige Isolationsproben — an feuchten Tagen mehrmals täglich —, gaben die Gewißheit, daß das zur Verarbeitung benutzte Material zuverlässig ist.

Der Skalenwert erwies sich, wie zu erwarten, unabhängig von der Nadelspannung (unabhängig von der Größe des Ausschlages).

Der Reduktionsfaktor der Aufstellung in der Hütte, seit Nov. 1913, wurde zuerst von Geiger am 28. Nov. 1913 zu 0.95 und am 4. Dez. zu 1.00 bestimmt.

Als Referenzpunkt diente Geiger zur Zeit der Ebbe eine ebene, frei gelegene Sandbank der Lagune. An der Aufstellung wurde nichts geändert. Spätere Prüfungen ergaben ähnliche Werte. Als Reduktionsfaktor auf die Ebene wurde benutzt 1.0.

Verarbeitung.

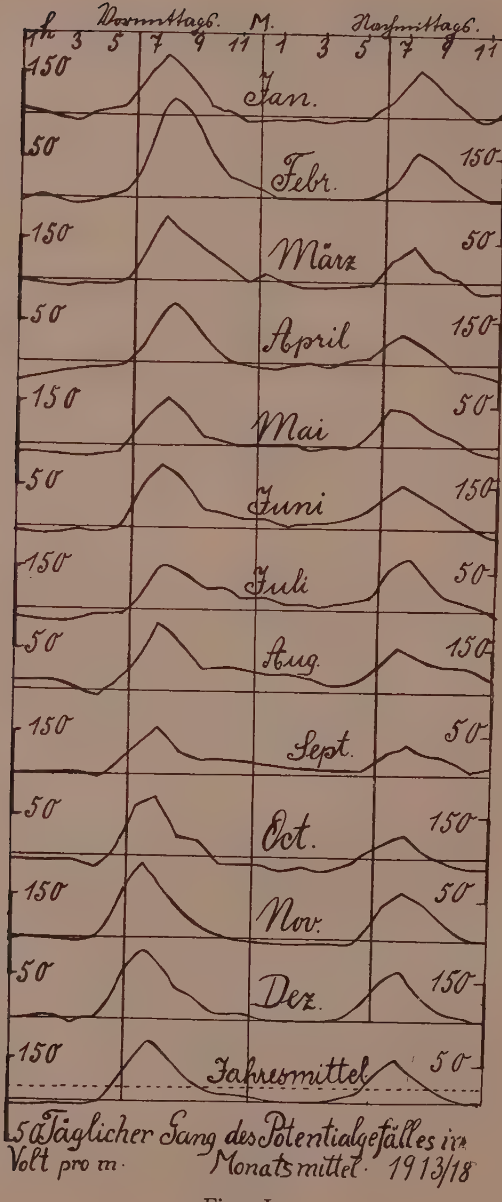
Die Verarbeitung der Registrierung geschah folgendermaßen: Es wurden durch Ausmessen der Kurven Stundenmittel gebildet. Zur Berechnung des täglichen Ganges und der Monatsmittel wurden nur störungsfreie Stunden verwendet; darunter werden hier Stunden ohne Regen und Gewitter verstanden. Auch die von Geiger in gleicher Weise berechneten Werte von Nov. 1913 bis Mai 1914 wurden zum Vergleich mit herangezogen und bei Mittelbildungen zur Berechnung des jährlichen Ganges mit benutzt.

Tabelle I enthält die Monatsmittel des täglichen Ganges von Stunde zu Stunde für alle Monate von Nov. 1913 bis August 1918, soweit brauchbare Registrierungen vorliegen. Die großen Lücken sind entstanden durch heftige Unwetter, die die luftelektrische Hütte mit Regen überschwemmten, sodaß Isolation und Batterien verdarben. 1918 trat Materialmangel ein, sodaß nur in zwei Monaten registriert werden konnte. Tabelle II und Fig. I enthält den täglichen Gang des Potentialgefälles im Monatsmittel; hier sind die einzelnen Monate der verschiedenen Jahre zu Mittelwerten vereinigt. Tabelle III enthält die Monatsmittel für jeden Monat von Nov. 1913 bis August 1918, soweit brauchbare Registrierungen vorliegen, ferner den mittleren jährlichen Gang dieser Monatsmittel und Jahresmittel.

Ergebnisse.

I. Der tägliche Gang.

Da sich der tägliche Gang in den verschiedenen Monaten nur sehr wenig von einander unterscheidet (worauf später genauer ein-


Vormittags.
M.
Nachmittags.
3 5 7 9 11 1 3 5 7 9 11
150
50
Jan.
Febr.
März
April
Mai
Juni
Juli
Aug.
Sept.
Oct.
Nov.
Dez.
Jahresmittel
Täglicher Gang des Potentialgefälles im
Volt pro m.
Monatsmittel. 1913/18

Figur I.

gegangen wird), läßt sich derselbe sehr gut zu einem täglichen Gang im Jahresmittel vereinigen, ohne daß die charakteristische Gestalt des täglichen Ganges dadurch wesentlich verändert wird. Dieses Jahresmittel des täglichen Ganges verläuft folgendermaßen:

Von 11^p—5^a und von 11^a—5^p sind die Stundenwerte wenig veränderlich; der Gang ist zu diesen Zeiten ruhig; von 11^p—5^a ist der Mittelwert gleich 95 Volt/meter, von 11^a—5^p 102 Volt/meter. Von $4\frac{1}{2}$—$7\frac{1}{2}^a$ steigt das Potentialgefälle bis zu 174 Volt/meter und fällt wieder bis 11^a. Ebenso von 4^p—$7\frac{1}{2}^p$ Anstieg bis zu 149 Volt/meter und Abstieg bis 11^p. Es sind also zwei ausgeprägte Maxima um $7\frac{1}{2}^a$ und $7\frac{1}{2}^p$ und zwei sehr flache Minima um $3\frac{1}{2}^a$ und $3\frac{1}{2}^p$ vorhanden. Das Morgenmaximum ist 25 Volt höher als das Abendmaximum. Das Nachtminimum, 5 Volt tiefer als das Tagminimum (Fig. II). Das Ganze besitzt somit einen ausgesprochenen halbtägigen Charakter; erreicht jedoch bei weitem nicht die Regelmäßigkeit einer Sinusschwingung. Besonders die spitzen Maxima gegenüber den sehr flachen Minima weichen davon ab. An ungestörten Tagen hat der Verlauf des Potentialgefälles dieses Aussehen. Störungen durch Gewitterbildung und Regen können jedoch das Bild ganz und gar verändern bis zur völligen Unkenntlichkeit. Negative Werte von mehreren hundert Volt wechseln mit positiven in wenigen Stunden oder mehrmals innerhalb einer Stunde.

Der tägliche Gang des Potentialgefälles im Mittel der Jahre 1913 bis 1918 läßt sich darstellen durch die Reihe: $r_0 + \sum r_n \sin(n\varphi + A_n)$. Die Analyse ergibt:

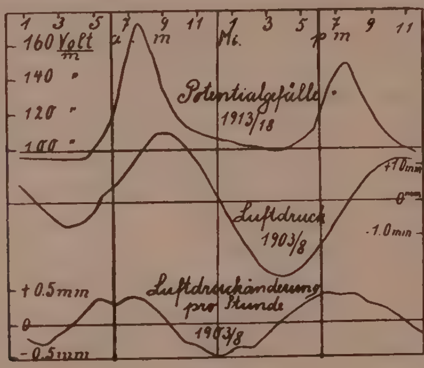
$$
\begin{aligned}
r_0 &= 114 \text{ Volt/meter} \\
r_1 &= 7 \quad " \qquad A_1 = 300^0, \\
r_2 &= 24 \quad " \qquad A_2 = 216^0, \\
r_3 &= 3 \quad " \qquad A_3 = 290^0, \\
r_4 &= 12 \quad " \qquad A_4 = 7^0, \\
r_5 &= 2 \quad " \qquad A_5 = 245^0.
\end{aligned}
$$

Das halbtätige Glied wirkt $3\frac{1}{2}$ mal stärker als das ganztätige. Dagegen ist r_4 größer als r_1; durch das ganz- und halbtägige Glied wird also der tägliche Gang noch nicht in genügender Annäherung dargestellt; man kann schwerlich annehmen, daß das vierte Glied eine in vierteltägiger Periode wechselnde selbständige physikalische Ursache besitzt. Das Hervortreten des Einflusses der Glieder höherer Ordnung (r_3, r_4) muß daher dahin gedeutet werden, daß der so deutlich hervortretende halbtägige Charakter des täglichen Ganges nicht die Form einer halbtägigen Sinusschwingung besitzt. Das schnellere Ansteigen und langsamere Abfallen der Maxima

läßt sich auch durch das Hinzufügen eines Dämpfungsgliedes zu der halbtägigen Sinusschwingung darstellen.

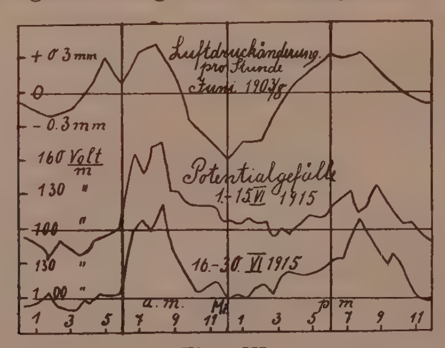
II. Vergleich des täglichen Ganges des Potentialgefälles und des Luftdrucks.

Das Potentialgefälle trägt einen ausgeprägten halbtägigen Charakter. Ein Vergleich mit dem ebenfalls ausgeprägten halbtägigen Gang des Luftdrucks, der fast einzigen meteorologischen Erscheinung von stark hervortretender halbtägiger Periode, ist



Figur II.

daher angebracht. In Fig. II sind der tägliche Gang des Luftdruck und der stündlichen Luftdruckänderung (Differentialkurve) dargestellt. Diese beiden Kurven sind Mittelwerte aus 1903/8, während der tägliche Gang des Potentialgefälles das Mittel von



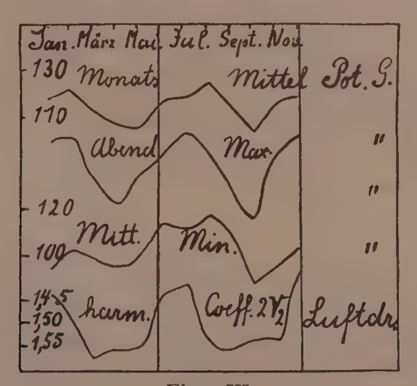
Figur III.

1913/18 bildet. Wegen der großen Regelmäßigkeit beider Erscheinungen wird ein Vergleich trotzdem möglich sein. Das Morgen- und Abendmaximum der Luftdruckänderung liegt ein wenig früher

als das entsprechende Maximum des Potentialgefälles. Die Maxima der Luftdruckänderungen zeigen beide eine leichte Eindellung, die sich in dem Mittelwert des täglichen Ganges des Potentialgefälles zwar nicht wieder findet, wohl aber überraschend oft in den Kurven der einzelnen Tage. Die Mittelbildung hat bei der zeitlichen Beweglichkeit der Maxima des Potentialgefälles schon innerhalb eines Monats diese Eindellung meist verwischt; während die relative feste Lage der Luftdruckmaxima sie selbst bei der Mittelbildung über alle Monate 1903/8 noch erhielt. Für die tägliche Luftdruckänderung wächst diese Eindellung der Maxima recht regelmäßig von Januar bis Juni, wo sie ihren größten Betrag erreicht. Fig. III zeigt das Potentialgefälle für die erste und zweite Hälfte des Juni 1915 in Halbstundenmitteln und die Stundenmittel des Luftdrucks. Es zeigt sich im Morgen- wie im Abendmaximum die Eindellung bei beiden.

III. Der jährliche Gang.

Die jährliche Änderung der Monatsmittel des Potentialgefälles weist eine geringe Schwankung auf: Maxima zur Zeit der Sonnenwenden, Minima zur Zeit der Äquinoktien. Besonders deutlich zeigt die Höhe des Abendmaximums diesen jährlichen Gang. Das Abendmaximum ist der Teil des täglichen Ganges, der den regelmäßigsten



Figur IV.

jährlichen Verlauf zeigt. Das Abendmaximum des Luftdrucks zeigt einen ähnlichen jährlichen Verlauf und vielleicht noch etwas ausgesprochener der zweite harmonische Koeffizient des Luftdrucks r_2- Fig. IV. Das Mittagsminimum zeigt auch einen ganzjährigen Gang mit Maximum zur Jahresmitte.

Abstand der Maxima.

Im Jahresmittel liegen die beiden Maxima des Potentialgefälles fast genau 12^h auseinander. Im Laufe des Jahres ändert sich dieser Abstand ein wenig. Von November bis Januar betrug er im Mittel $12^h 10^m$, von Mai bis Juli im Mittel $11^h 43^m$. Bei der Kurve der Luftdruckänderung ist die Bestimmung dieses Abstandes der Maxima gerade wegen der dort liegenden Eindellung eine zu unsichere. Die Kurven des Luftdrucks aber zeigen dasselbe Gesetz. Die Maxima rücken im südlichen Winter (Juni) zusammen. Von November—Januar ist ihr Abstand im Mittel $14^h 8^m$, im Mai—Juli $13^h 15^m$ (Tabelle 4). Auch an anderen Stationen zeigt sich dies Zusammenrücken der Maxima des Potentialgefälles und Luftdrucks. Für Potsdam hat Kähler die stündliche Änderung des Luftdrucks mit dem Potentialgefälle verglichen. Beide, Luftdruck und Potentialgefälle, zeigen das Zusammenrücken der Maxima vom Sommer zum Winter hin. Die Kurven des Potentialgefälles 1904/8 für Potsdam zeigen im Juni und Juli einen Abstand der Maxima von 14^h, im März und September von 12^h (Lüdeling, Ergebnisse 5jähriger Registrierung des Potentialgefälles in Potsdam. Tätigkeitsbericht 1909 S. 153). Ebenso rücken die Maxima der stündlichen Änderung des Luftdrucks für Potsdam zusammen, im Juni und Juli 1907/8 betrug ihr Abstand 14^h, im September und März 11^h (Kähler, Abhandlungen des Königlich Preuß. Meteor. Instituts IV, 1. S. 22).

IV. Einfluß des Windes.

Der Wind drückt das positive Potentialgefälle herab. An normalen Passattagen (Schönwettertagen) sinkt am Observatorium die Windgeschwindigkeit von 4 m/sec um Mittag auf $2\frac{1}{2}$ m/sec um Mitternacht. Verbunden ist dieses Sinken der Windgeschwindigkeit mit einer Drehung von ENE um Mittag nach SSE um Mitternacht. Bedingt sind beide Vorgänge durch den Nachtwind vom Gebirge. Draußen auf offener See bläst der Passat die ganze Nacht hindurch. Das Wechseln der Windrichtung ist oftmals um 6^a und 6^p begleitet von kurzen Windstillen. Diese liegt also ungefähr zur Zeit der Maxima des Potentialgefälles. Ist der Passat draußen besonders stark, so bläst er oft in Mulinum die ganze Nacht hindurch aus wenig veränderter Richtung. In diesen windigen Tagen und Nächten sind die Maxima des Potentialgefälles wenig ausgebildet, fehlen oft ganz. Windstille Nächte dagegen sind meist von hohen Maxima begleitet; oftmals sinkt dann zwischen dem Abendmaximum und dem folgenden Morgenmaximum das Potentialgefälle nur wenig, sodaß bei hohen Nachtwerten ein Nachtminimum kaum hervortritt.

Das normale Bild der beiden steilen Maxima um $7\frac{1}{2}^a$ und um $7\frac{1}{2}^p$, getrennt durch die flachen Tag- und Nachtminima, tritt am deutlichsten hervor bei klarem Passatwetter tagsüber und klaren Nächten mit mäßigem Nachtwind vom Gebirge.

V. Einfluß der Wolken und des Regens.

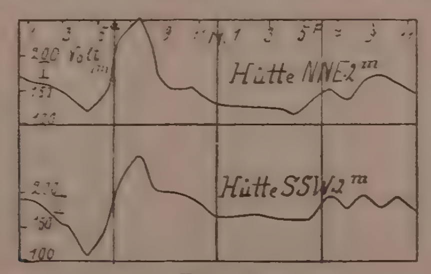
Stratusdecken drücken das Potentialgefälle herab, besonders die Maxima, oft so sehr, daß sie kaum hervortreten.

Über den etwa 10 klm entfernten Gebirgskamm bilden sich in der Regenzeit am Nachmittag Gewitterwolken, deren Ausläufer oft bis nah an die Küste reichen. Sie bedingen starke Störungen im Gefälle, meist negative Werte. Auch Regenböen verursachen negative Werte, oftmals mit vorangehendem und nachfolgendem positiven Anstieg. Landregen läßt die Maxima nicht zur Entwickwicklung kommen, so daß sich die Morgen- und Abendwerte zur Zeit der Maxima nur wenig über die Tag- und Nachtwerte erheben. Letztere sind dagegen nur wenig niedriger als an normalen Tagen.

VI. Einfluß der Aufstellung.

a) Sonden in gleicher Höhe über dem Erdboden.

Der Sondenträger ragt aus der NE-Wand der luftelektrischen Hütte hervor. Die Wände der luftelektrischen Hütte sind aus Holz und weiß gestrichen. Die in der Sonne gelegenen Teile zeigen bei trockenem Wetter eine Aufladung (Hallwachseffekt). Auch trat diese Aufladung zuweilen auf bei Gewitterbildung.



Figur V.

Um den Einfluß der Aufstellung auf die Registrierung des täglichen Ganges zu prüfen, wurde eine zweite Sonde in gleicher Höhe an der entgegengesetzten Hausecke an der Südwestwand angebracht und mit einem zweiten Benndorfschen Registrierapparat vom 7.—16. September 1917 Parallelregistrierung vorgenommen.

Die Sonde im NNE ist während des ganzen Tages dem E-Passat ausgesetzt. Die Sonde im SSW ist mittags, wenn der Passat aus ENE weht, davor geschützt. Morgens und abends weht der Passat aus SSE und kann die Sonde an der SSW-Seite treffen. Vormittags und nachmittags hat die NNE-Wand Sonne, die SSW-Wand Schatten. Dieser Unterschied der Aufstellung gibt schon ein wesentlich verändertes Aussehen des täglichen Ganges; siehe Fig. V: Kurve I und II. Nachtstörungen von Wolken und Landwind sind in II



Figur VI.

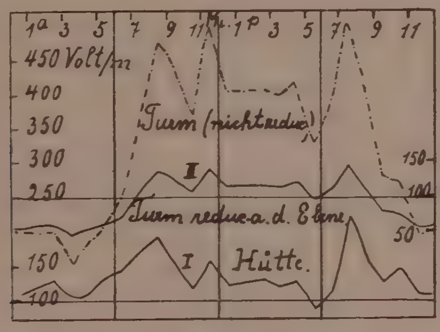
(Sonde im SSW) stärker als in I (Sonde im NNE). Die Morgenmaxima sind gleich; das Mittagsminimum ist bei II um 40 Volt höher als bei I; das Abendmaximum bei II um 20 Volt höher als bei I. Diese höheren Werte scheint der Windschatten und der Sonnenschatten veranlaßt zu haben. Die zweite Sonde wurde dann in gleicher Höhe an der WNW-Wand angebracht und vom 16.—29. September 1917 eine zweite Parallelregistrierung vorgenommen, Kurve II in Fig. VI. Der Passatwindschatten ist jetzt auch morgens vorhanden; dagegen fehlt um Mittag der Sonnenschatten. Kurve II zeigt ein um 50 Volt höheres Morgenmaximum (Wind- und Sonnenschatten), dagegen nur wenig höhere Mittag- und Abendwerte.

Der Wind scheint also das Potentialgefälle ganz lokal erheblich herabzudrücken, wie schon oben aus dem Fehlen der Abend- und Morgenmaxima bei sehr windigen Tagen und Nächten geschlossen wurde. Die Sonne scheint andererseits die Hauswände positiv aufzuladen und dadurch das Feld in der Nähe der Hauswand zu ändern. Das Dach und die Wände der Hütte wurden daher mit gutgeerdetem Drahtnetz überzogen. Der tägliche Gang des Potentialgefälles zeigte jedoch keine wesentliche Änderung.

b) Sonden in verschiedener Höhe über dem Erdboden.

Um den Einfluß der Aufstellung in verschiedener Höhe über dem Erdboden zu ermitteln, wurden Parallelregistrierungen bei trockenem Wetter auf dem am Hauptgebäude gelegenen 15 m hohen Holzturm vom 28. XII. 1914—2. I. 1915 ausgeführt. Die Erdung wurde durch Drahtleitung ins Grundwasser geführt. Fig. VII zeigt das Mittel aller Registrierungen II auf dem Turm, I in der

Hütte (Mittel aus denselben Stunden). Während der Registrierung fand mehrfach eine sorgfältige Prüfung der Isolation statt. Die Turmregistrierungen sind auf die Ebene reduziert und zwar sind die Nachmittagswerte (12—4p) der Bestimmung des Reduktionskoeffizienten zugrunde gelegt. Die Figuren zeigen, daß die Tagwerte auf dem Turme den Nachtwerten gegenüber relativ höher sind als an der Hütte. Auf dem Turme zeigt sich eine stärkere ganztägige Periode als in der Hütte. An Schönwettertagen herrscht



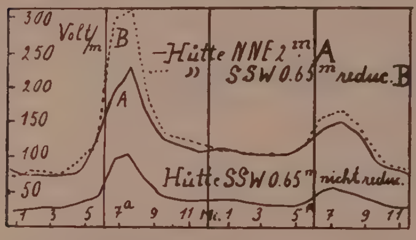
Figur VII.

auf dem Turm die ganztägige Periode vor mit Maximum um Mittag; dieser überlagern sich die relativ geringeren Morgen- und Abendmaxima. An der Hütte herrschen die Morgen- und Abendmaxima vor. Es ist nicht unmöglich, daß das starke Hervortreten einer ganztägigen Periode auf dem Turm mit Maximum um Mittag dadurch verstärkt wird, daß die wachsende Sonnenstrahlung das ganze Gerüste des Holzturmes am Tage austrocknet, während über Nacht sich ein Tau auf ihm niederschlägt. Die durch den Turm bedingte Deformation der Äquipotentiallinien müßte sich dann am Tage verflachen, also ein Senken der Äquipotentiallinien am Ort der Sonde tags eintreten, damit ein Wachsen des Gefälles. Bei unserem luftig gebauten Holzturm ist dies gut möglich. Auf dem Eiffelturm in Paris und auf einem Holzturm in Blue Hill wurde ebenfalls ein Überwiegen der ganztägigen Periode gegenüber einer halbtägigen, besonders im Sommer beobachtet.

Um die Abhängigkeit des Gefälles von der Höhe weiter zu untersuchen, wurde während des ganzen Monats Oktober 1917 eine Parallelregistrierung an der SSW-Seite der Hütte 65 cm über dem Boden vorgenommen. Im September (siehe oben) war ermittelt, daß an dieser Wand in 2 m Höhe dasselbe Morgenmaximum herrscht, wie an der Normalaufstellung (NNE-Wand). Da-

gegen war das Mittagsminimum an der SSW-Wand um 40 Volt höher als an der Normalaufstellung. Die Registrierung in 65 cm Höhe an der SSW-Wand ist auf die Ebene reduziert. Es wurden wieder die Nachmittagswerte zur Bestimmung des Reduktionsfaktors benutzt. Fig. VIII zeigt, daß am Boden an der SSW-Wand die Morgen- und Abendmaxima höher sind als in 2 m Höhe in der Normalaufstellung. Berücksichtigt man noch, daß in der gleichen Höhe von 2 m an der SSW-Wand die Mittagswerte höher sind als in der Normalaufstellung, so tritt noch deutlicher hervor, daß am Boden in $\frac{2}{3}$ m Höhe die Maxima höher sind — das Morgenmaximum etwa doppelt so hoch — als in 2 m Höhe.

Zusammenfassend haben wir also: am Boden und auch noch in 2 m Höhe sind Mittag- und Nachtwerte nahe gleich. Diesen gegenüber treten am Boden die Maxima stärker hervor als in 2 m Höhe. Auf dem Turme (15 m) liegen die Mittagswerte höher als die Nachtwerte. Diesen hohen Mittagswerten gegenüber treten die Maxima zurück. Es sieht also aus, als ob die ganztägige Periode mit der Höhe wächst, die halbtägige bei Annäherung an den Boden. Die bisherigen Erfahrungen über den Einfluß der Aufstellung machen es jedoch wahrscheinlich, daß ein Teil dieser Erscheinung nur von der Art der Aufstellung herrührt, von der vielleicht mit der Witterung wechselnden Deformation der Äquipotentialflächen in der Nähe der mehr oder weniger leitenden Gebäude.



Figur VIII.

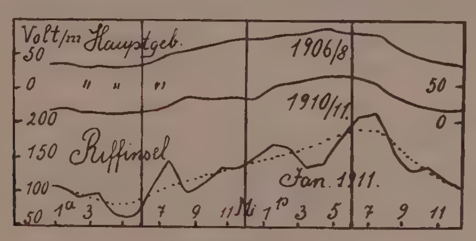
Die starke Entwicklung des Morgenmaximums am Boden (0.65 m Höhe) und im Windschatten (WNW-Wand der Hütte) legen die Vermutung nahe, daß vertikale Luftströmungen bei Erwärmung des Bodens die Entwicklung des Morgenmaximums begünstigen. In der Zeit der Morgenwindstille zwischen Land- und Seewind können sich diese vertikalen Luftströme nahe am Boden am besten an windgeschützten stark erwärmten Orten ausbilden. Diese vertikale Luftströmung trägt dann feuchte staubreiche Luft empor. Dadurch erniedrigt sich die Beweglichkeit der adsorbierten Jonen; die Leitfähigkeit sinkt und das Gefälle steigt an. Außerdem wirkte die vertikale Verschiebung bodennaher Raumladungen.

Stratusdecke und Landregen verhindern die Erwärmung des Bodens, Wind stört die vertikale Luftströmung. Bei diesen Wetterlagen können sich, wie auch die Beobachtung zeigt, die Maxima nicht ausbilden.

Die tieferen Mittagswerte auf der Sonnenseite (NNE) gegenüber der Schattenseite (SSW) in 2 m Höhe deuten auf lichtelektrische Wirkung (Aufladung der Wand; Änderung der Raumladung durch Zunahme negativer Träger).

VII. Vergleich der Ergebnisse der Registrierungen verschiedener Zeitabschnitte.

In Fig. VIII und IX ist der tägliche Gang des Potentialgefälles nach den Registrierungen in den verschiedenen Aufstellungen zu-



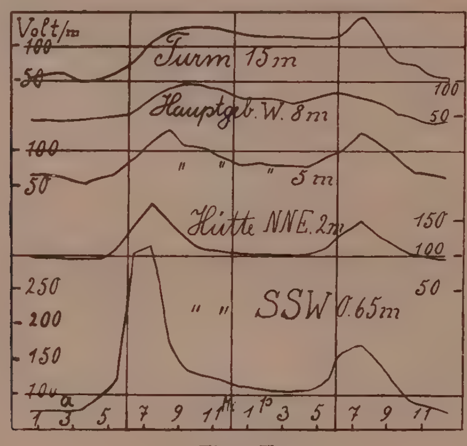
Figur IX.

sammengestellt. Die folgende Tabelle gibt die nötigen Erläuterungen.

Zeit	Dauer der Registrierung	Aufstellung	Höhe der Sonde über dem Boden	Sonde
1906—9	36 Monate	W-Seite des Hauptgebäudes	8 m	Radium
1910/11	6 „	W-Seite des Hauptgebäudes	8 „	Polonium, Spritzkollektor
1912/13	12 „	W-Seite des Hauptgebäudes	5 „	Jonium
1913/18	40 „	NNE-Seite der Hütte	2 „	„
Januar 1911	10 Tage	Riffinsel	3 „	Polonium, Spritzkollektor
Dez. 1914	5 „	Holzturm	15 „	Jonium
Sept. 1917	10 „	SSW-Seite der Hütte	2 „	„
„ „	12 „	WNW-Seite der Hütte	2 „	„
Oktober 1917	31 „	SSW-Seite der Hütte	$\frac{2}{3}$ „	„

Der tägliche Gang und auch die Tagesmittel in den verschiedenen Aufstellungen zeigen große Abweichungen.

An der Westseite des Hauptgebäudes in 8 m Höhe (1906/8, 1910/11) war der tägliche Gang vorwiegend ganztägig. Maximum bei Tage, Minimum bei Nacht (Fig. IX). Nur in der Passatzeit (Schönwetterzeit) zeigte sich zuweilen dem ganztägigen Gang überlagert ein geringer halbtägiger Gang mit Maxima am Morgen und Abend (Juli/August 1906 Fig. X Hauptgebäude W 8 m). Im allgemeinen fehlt das Morgenmaximum. An der Westseite des Hauses ist die Bodenerwärmung am frühen Morgen (im Sonnenschatten) nicht groß genug, um die vertikale Luftströmung in genügender Stärke bis zur Höhe von 8 m emporzutreiben.



Figur X.

K. Wegener unternahm Jan. 1911 Vergleichsmessungen auf einer kleinen Riffinsel. Die Insel bestand aus lockerem Korallenschotter; bei Hochwasser ragten etwa 100 qm bis zu $\frac{1}{2}$ m aus dem Wasser hervor. Sie lag $1\frac{1}{2}$ klm vom Strand am Außenrand der Lagune. Der tägliche Gang erwies sich auch hier vorwiegend ganztägig; doch sind Morgen- und Abendmaximum eines geringen halbtägigen Ganges überlagert. (Fig. IX.)

Die Überwachung der Isolation und die Verarbeitung der Aufzeichnungen dieser Aufstellung wurden mit besonderer Vorsicht ausgeführt. Bei der Berechnung des täglichen Ganges 1906/8 und 1910/11 waren alle Tage verwendet worden und nur solche Aufzeichnungen ausgeschieden, bei denen Isolationsstörungen offenbar vorhanden waren. Manche zweifelhaften Registrierungen waren jedoch zur Mittelbildung verwendet worden. Es ist daher möglich, daß in diesen Jahren Aufzeichnungen mit teilweise gestörter

Isolation die Tagesmittel herabgedrückt haben. Da solche Isolationsstörungen vor allem in den Morgenstunden zu erwarten sind, können auch diese Morgenwerte besonders stark herabgedrückt worden sein. Bei der Verarbeitung der Aufzeichnungen auf der Riffinsel sind jedoch alle Werte ausgeschaltet, bei denen der Verdacht einer Isolationsstörung vorlag, ferner alle durch Gewitter oder Regen etc. gestörten Werte. Der tägliche Gang des Gefälles auf der Riffinsel ist trotzdem vorwiegend ganztägig. Die Tagwerte liegen wesentlich höher als die Nachtwerte. Ein halbtägiger Gang ist überlagert. Das Morgenmaximum ist jedoch im Verhältnis zum Abendmaximum nur schwach ausgebildet. Die zur Ausbildung des Morgenmaximums nötige Bodenerwärmung und Windstille sind am Außenrand der Lagune nicht vorhanden.

1912 wurde die Aufstellung vom Oberstock in den Unterstock verlegt, etwa 3 m tiefer, jetzt also 5 m über dem Boden an der Westwand des Hauptgebäudes. Die Hartgummistützen des Sondenträgers wurden durch Bernstein ersetzt, so daß alle Isolationsteile aus hochpoliertem klaren Bernstein bestanden. Zur Ableitung des täglichen Ganges wurden nur Schönwettertage benutzt (im Mittel 6 Tage pro Monat). Der tägliche Gang 1912/13 (12 Monate) an Schönwettertagen in 5 m Sondenhöhe ergab (Fig. X) ein deutlicheres Hervortreten des halbtägigen Ganges, Maxima am Morgen und Abend. Ein ganztägiger Gang ist jedoch noch deutlich vorhanden. Die Mittagwerte liegen erheblich höher als die Nachtwerte.

Ende 1913 errichtete L. Geiger auf einem einigermaßen freien Gelände am Rande der Innenlagune eine luftelektrische Hütte von $2\frac{1}{2} \times 4$ m Größe und $2\frac{1}{2}$ m Höhe, die zur Registrierung des Gefälles und zur Messung der Regenelektrizität dienen sollte. Die Sonde befand sich an der NNE-Seite 2 m über dem Boden. In dieser Aufstellung trat der halbtägige Gang stark hervor, der ganztägige dagegen ganz zurück. Zur eingehenderen Untersuchung der Abhängigkeit des Ganges von der Aufstellung wurden dann Dez. 1914 in 15 m, Okt. 1917 in 0.65 m Höhe und Sept. 1917 an der SSW- und NNW-Wand in 2 m Höhe registriert. Hierdurch ergab sich, wie schon ausgeführt, eine klar ausgesprochene Abhängigkeit von der Höhe, wie Fig. X und auch die nachfolgende Tabelle zeigt.

Höhe der Sonde	15 m	8 m	5 m	2 m	0.65 m
$\frac{\text{Morgen-Max.}}{\text{Mittag-Min.}}$	1.18	1.42	1.69	1.77	2.95 (2.35)
$\frac{\text{Abend-Max.}}{\text{Mittag-Min.}}$	1.28	1.20	1.64	1.52	1.62
$\frac{\text{Mittag-Min.}}{\text{Nacht-Min.}}$	2.22	1.92	1.50	1.05	1.42 (1.05)

Bildet man das Verhältnis des Morgen- und Abendmaximums zum Mittagminimum, so tritt die relative Abnahme besonders des Morgenmaximums mit der Höhe deutlich hervor. Das bedeutet: Der halbtägige Gang ist am Boden stärker. Das Verhältnis des Mittagsminimums zum Nachtminimum steigt mit der Höhe; das heißt: der ganztägige Gang wächst mit der Höhe. Bei der Parallelregistrierung in 0.65 m und in 2 m Höhe waren im Mittel der Registrierzeit in der Normalaufstellung das Nachtminimum um 25 Volt niedriger und das Morgenmaximums um 50 Volt höher als im Mittel der Jahre 1913/18. Um also die einzelnen Phasen in 0.65 m Höhe mit den entsprechenden des mittleren Ganges aus 1913/18 für die Höhe 2 m vergleichen zu können, muß man noch entsprechende Korrektionen anbringen. Die eingeklammerten Zahlen in der Kolonne für 0.65 m enthalten diese Korrektionen. Auch die anderen Parallelregistrierungen müßten in ähnlicher Weise korrigiert werden. Das gesuchte Gesetz zeigt sich jedoch schon genügend klar an den unkorrigierten Werten der Tabelle.

Die Monatsmittel und Jahresmittel der Schönwettertage liegen höher als die aus allen Tagen gewonnenen. Die Tabelle gibt den Unterschied. Für 1906/9 sind unter „Schönwetter" die Werte für alle Tage der Passatzeit und insbesondere für Juli/Aug. 1906 angegeben.

Tagesmittel des Potentialgefälles in Volt pro m.

		alle Tage	Schönwetter	Aufstellung
1906/9	36 Monate	39	56 (Passatzeit) 76 (Juli/Aug. 1906)	Hauptgebäude W-Wand 8 m hoch
1910/11	6 „	35	— —	„ „ 8 „ „
1912/13	12 „	71	90	„ „ 5 „ „
1913/18	40 „		116	Hütte NNE-Wand 2 „ „

Der Unterschied zwischen Passat- und Regenzeit, also der jährliche Gang des Gefälles tritt um so mehr zurück, je mehr man sich nur auf ungestörte Werte beschränkt. An regen- und gewitterfreien Passattagen ist das Tagesmittel des Gefälles nahe gleich, gleichviel ob die Tage in der Passat- oder Regenzeit (im Südwinter oder Südsommer) liegen. An Gewitter- und Regentagen ist das Tagesmittel des Gefälles erheblich niedriger. Bei Benutzung aller Werte ergibt sich daher ein jährlicher Gang, der ein Minimum im Südsommer (Regenzeit) besitzt. Ein geringer ganzjährlicher Gang ist bei der für 1913/18 getroffenen Auswahl ungestörter

Stunden doch noch geblieben; und zwar ist im Südsommer vor allem das Nachmittagsminimum um etwa 20 Volt tiefer. Außerdem zeigt sich der schon oben besprochene halbjährliche Gang.

Die Unterschiede der Jahresmittel der einzelnen Zeitabschnitte beruhen zum Teil auf der Verschiedenheit der Ableitung aus allen oder nur aus Schönwettertagen. Zum Teil ist der Unterschied aber auch durch den verschiedenen Verlauf des täglichen Ganges am Boden und in der Höhe bedingt. Die Reduktionen auf die Ebene wurden stets am Tage vorgenommen. Die Sonde in der freien Ebene befand sich dabei etwa 1 m über dem Boden. Hier wird angenähert derselbe tägliche Gang herrschen wie an der Hüttenwand, wo das Nacht- und Tagminimum sich im Mittel der Jahre sehr nahe gleich ergeben hat. Die Jahresmittel 1913/18 werden daher einigermaßen richtige Mittelwerte für das Gefälle in der Nähe des Bodens auf freier Ebene geben. Die Jahresmittel 1906/8, 10/11 und 12/13 aus den Registrierungen in 8 m und 5 m Höhe sind dagegen wegen der niedrigen Nachtwerte in dieser Höhe niedriger als das Gefälle am Boden in der freien Ebene, sowohl für alle wie für die Schönwettertage.

VII. Der tägliche Gang des Potentialgefälles nach Weltzeit.

L. A. Bauer hat darauf hingewiesen (Terr. Mag. 1921), daß die von der Carnegie-Institution ausgeführten Schiffsbeobachtungen des Potentialgefälles auf dem pazifischen atlantischen und indischen Ozean einen täglichen Gang zeigen, der nach Weltzeit auf allen drei Ozeanen gleichsinnig verläuft. Der im wesentlichen ganztägige Gang zeigt ein ausgesprochenes Maximum von 140 Volt/m um 19^h mittlere bürgerliche Greenwich-Zeit und ein Minimum zwischen 4 und 9^h Gr.-Zt. K. Hoffmann gibt (Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre 1923) eine Zusammenstellung der arktischen und antarktischen Beobachtungen des Potentialgefälles, die ebenfalls einen gleichsinnigen ganztägigen Gang nach Weltzeit nehmen, trotzdem die sieben Stationen Längendifferenzen von nahe 180° aufweisen. Das Maximum liegt wiederum in guter Übereinstimmung bei 19^h mittlerer bürgerlicher Greenwich-Zeit. Das Minimum schwankt zwischen 4 und 11^h Gr.-Zt. Ferner hat S. J. Mauchly (Terr. Mag. 1923) die harmonischen Koeffizienten des täglichen Ganges für Land- und Seebeobachtungen über der ganzen Erde zusammengestellt. Das Maximum des ganztägigen Ganges liegt danach auf dem Lande im Mittel um 16.3^h, auf der See um 17.5^h Gr.-Zt. Es scheint kaum möglich zu sein, daß diese Übereinstimmung des

täglichen Ganges nach Weltzeit an Orten so ungleicher Länge und Breite als Zufall angesehen werden kann, so schwer erklärbar es auch sein mag.

Die Beobachtungen in Samoa zeigten, daß in 8 m Höhe zwar ein ganztägiger Gang vorherrscht, doch liegt sein Maximum bei 4^h Gr.-Zt; auf der Riffinsel im Seewind um 7 Uhr Gr.-Zt. Die Beobachtungen nahe dem Boden in 2 m und vor allem in 0.65 m Höhe zeigen ein stärkeres Morgen- als Abendmaximum; also auch einen geringen ganztägigen Gang. Der Phasenwinkel des ganztägigen Ganges in 2 m Sondenhöhe beträgt im Jahresmittel 300^0. Das Maximum des ganztägigen Ganges liegt somit bei $21\frac{1}{2}^h$ Gr.-Zt.; es würde also einigermaßen mit der Lage des Maximums auf den Ozeanen und in den polnahen Ländern zusammenfallen. Aber dies Morgenmaximum nahe dem Erdboden in Samoa scheint doch gerade lokal und ortszeitlich bedingt zu sein. Der Gang des Gefälles in Samoa hängt stark von den örtlichen Verhältnissen ab, wodurch solche allgemeinen für die ganze Erde gültigen Zusammenhänge verdeckt werden mögen. Die Faktoren, die in Samoa diese lokale Abhängigkeit bedingen, fehlen dagegen auf offenem Meere und in schneebedeckten Gegenden, sodaß dort diese weltzeitlichen Zusammenhänge reiner zu Tage treten können.

Zur Erklärung eines weltzeitlichen Gliedes im täglichen Gang des Potentialgefälles möchte ich ausgehen von der unsymetrischen Lage des erdmagnetischen Feldes in Bezug auf die Rotationsaxe der Erde; denn auch der tägliche Gang der erdmagnetischen Aktivität scheint ein weltzeitliches Glied zu enthalten, dessen Maximum gleichfalls in der Nähe von 19^h Greenwich-Zt. liegt. Der Vergleich der stündlichen Charakterzahlen für Eskdalemuir und Antarctic (Ch. Chree, British Antarctic Expedition 1910/13) und ebenso das Verhalten der erdmagnetischen Aktivität 1915 in Potsdam und Cheltenham (siehe die betreffenden Jahrbücher dieser Observatorien) scheint mir etwas derartiges anzudeuten. Man muß dann wohl annehmen, daß das Eindringen elektrischer Ladungen für die Erde als Ganzes am stärksten erfolgt, wenn die hierzu offenbar günstigste Position ($17-19^h$ Greenw.-Zt.; $0-2^h$ p. m. Ortszeit am magnetischen Nordpol) erreicht ist. Man muß sich dabei allerdings vorstellen, daß die tief eindringende Ladung negativ ist und wenigstens teilweise bis zum Erdboden gelangt, sich dort schnell über ihn verteilt und ihn auflädet. Das Gefälle $\frac{\partial V}{\partial h} = -4\pi\sigma$ wird dann auf der ganzen Erde gleichzeitig anwachsen. Der Teil der eindringenden Strahlung, der in größerer Höhe absorbiert wird, wird durch seine Jonisation

die erdmagnetische Aktivität steigern, sodaß auch diese zur selben Zeit ein für die ganze Erde gleichzeitiges Maximum erreicht.

Die Schwierigkeit dieser Anschauung liegt darin, daß wir keine elektrischen Korpuskularstrahlen kennen, die eine so große Reichweite besitzen, daß sie von außen kommend bis zum Erdboden herabreichen können. Nimmt man jedoch an, daß Elektronen von nahe (bis auf wenige Meter-)Lichtgeschwindigkeit, infolge ihrer großen elektrodynamischen Masse, die nötige Durchdringungskraft besitzen, so wissen wir jedoch nicht, wie groß die Ionisationskraft dieser Strahlen ist. Mit zunehmender Geschwindigkeit ist eine Abnahme zu erwarten. Zwischen 1,2 und $2{,}9 \times 10^{10}$ cm/sec ist die Abnahme proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit.

Die Zahl der pro cm Weglänge in Luft von Atmosphärendruck durch β Strahlen hoher Geschwindigkeit erzeugten Ionen beläuft sich auf einige Zehner. Wenn die eindringende Ladung das Gefälle merklich erhöhen soll, so muß sie von derselben Größenordnung sein, wie die in gleicher Zeit durch den normalen vertikalen Leitungsstrom geförderte Elektrizitätsmenge: $ne = \lambda \frac{\partial V}{\partial h}$. Rund 1000 Elektronen müssen pro cm^2 und sec den Boden erreichen. Wenn ihre ionisierende Kraft auch zehnmal geringer ist als die oben erwähnte, so würden pro sec im cm^3 doch mehrere hundert mal mehr Ionen erzeugt als tatsächlich nach den Beobachtungen gebildet werden. Man müßte daher annehmen, daß die sehr schnellen Elektronen überhaupt nicht mehr zu ionisieren vermögen, oder doch nur eine unvollständige Trennung der Ladungen bewirken (wie zum Teil bei α Strahlen längs der Bahn), sodaß eine äußerst schnelle Rekombination eintritt, wobei das normale (longitudinale) Erdfeld fördernd wirkt. Da diese eindringenden Elektronen vorwiegend in hohe Breiten eingesogen werden, so stellen sie dort einen auswärts gerichteten elektrischen Vertikalstrom dar, der wenigstens qualitativ den dort bestehenden Wert des Ringintegrals $\int H ds$ der erdmagnetischen Kraft zu erklären vermöchte. Wie sehr auch einerseits die Erscheinungen zu einer solchen oder doch ähnlichen Erklärung drängen, so sind doch andererseits die Bedenken groß, Elektronenstrahlen von den obigen, bisher nicht beobachteten Eigenschaften anzunehmen. Die Versuche, solche bis zum Boden herabreichende Korpuskularstrahlen durch Aufladung isolierter Leiter nachzuweisen, sind bisher, — allerdings aus erklärbaren Gründen — gescheitert, sodaß diese Versuche also nicht als Widerlegung angesehen werden können.

Tabelle I.

Täglicher Gang des Potentialgefälles nach Ortszeit. (Stundenmittelwerte in Volt/meter.)

Aufstellung: NE-Wand der luftelektrischen Hütte, Joniumsonde 2 m über dem Erdboden.

	a. m. 0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12	p. m. 12–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12
Januar 1913																								
14	89	89	92	90	99	105	149	194	151	126	120	108	103	98	99	96	95	102	131	155	145	106	101	93
15	126	121	108	116	134	117	154	207	176	122	99	101	94	96	91	87	92	104	131	174	138	125	107	108
16																								
17	90	88	78	80	75	102	122	120	116	89	94	78	86	89	92	92	98	99	103	138	144	113	87	106
18																								
Febr. 1913																								
14	101	110	105	105	107	109	157	215	196	147	127	116	110	102	101	103	103	102	119	158	125	106	101	98
15	94	91	85	82	86	95	133	220	227	162	122	112	98	95	93	90	94	105	123	164	163	128	105	91
16																								
17																								
18																								
März 1913																								
14	81	78	81	77	76	85	138	200	169	127	113	100	98	90	88	88	89	91	125	142	107	90	83	79
15	96	93	87	92	93	106	128	172	152	131	105	87	109	100	96	96	102	96	123	151	122	111	86	92
16	112	114	110	113	112	107	129	158	142	136	129	117	111	103	96	95	97	107	127	135	119	111	98	96
17																								
18																								
April 1913																								
14	69	79	79	83	82	82	119	165	170	120	108	94	89	90	86	80	90	95	123	142	106	88	88	84
15	77	78	87	98	97	96	100	177	156	137	111	98	92	100	110	95	99	103	129	135	122	99	86	76
16	86	92	99	92	98	107	137	159	170	124	94	93	94	98	101	96	120	123	142	121	111	96	97	90
17																								
18																								

Mai	1913																								
	14	83	79	85	75	78	86	108	141	127	116	112	105	97	95	93	87	88	95	124	124	111	07	88	86
	15	91	91	95	99	99	106	145	183	178	127	116	109	107	100	97	100	103	115	141	138	120	11	106	94
	16	92	92	78	75	81	99	118	137	94	92	76	82	87	97	90	89	93	128	155	137	111	05	91	95
	17	91	94	87	87	85	92	134	149	136	100	106	103	104	109	98	110	110	120	165	177	137	20	102	91
	18																								
Juni	1913																								
	14																								
	15	94	91	90	86	96	100	149	162	162	127	115	114	105	106	105	111	114	118	129	144	140	128	112	97
	16	105	99	96	112	92	102	151	175	147	115	113	109	115	103	98	105	116	131	162	145	126	111	105	101
	17	84	81	87	87	89	95	133	192	164	128	120	110	112	104	113	103	108	120	146	166	129	109	87	74
	18	96	95	98	98	93	117	148	156	111	123	125	134	134	134	127	126	128	130	172	157	137	117	105	104
Juli	1913																								
	14																								
	15	102	102	106	105	117	118	143	187	172	142	122	109	111	105	101	105	107	114	144	154	154	139	117	109
	16	106	94	93	103	97	112	135	188	178	133	128	133	126	122	120	116	117	131	171	168	131	118	109	102
	17	77	72	69	62	65	76	91	116	88	76	96	103	106	99	109	106	105	101	128	149	116	102	95	83
	18	79	75	68	73	70	73	91	125	138	153	160	107	109	103	95	97	104	120	154	188	137	101	90	85
August	13																								
	14																								
	15	143	144	131	131	128	138	167	240	202	149	140	131	124	128	126	112	117	138	162	174	167	178	176	157
	16	98	93	98	89	89	108	126	155	124	109	127	128	128	123	117	108	109	111	141	137	109	125	119	102
	17	100	96	97	87	78	91	119	159	156	124	127	127	121	112	115	107	109	110	134	151	131	110	101	99
	18																								

Tabelle I. (Fortsetzung.)

		a. m. 0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12	p. m. 12–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12
Sept.	1913																								
	14																								
	15	110	95	95	103	97	111	131	146	135	117	103	111	105	100	99	94	102	105	111	124	125	120	115	117
	16	86	95	90	94	99	107	118	125	108	109	112	107	115	115	111	105	103	100	137	136	114	104	96	108
	17	103	106	111	102	100	109	162	197	157	130	137	130	120	114	114	111	113	122	131	153	143	139	117	108
	18																								
Okt.	1913																								
	14	95	95	91	82	83	103	152	199	152	138	96	85	97	81	88	87	90	108	113	142	106	101	88	97
	15	92	97	91	86	81	105	150	138	110	105	92	89	84	80	80	81	86	92	104	104	91	86	89	84
	16	89	83	95	107	92	105	165	151	104	105	86	91	89	84	92	80	93	95	115	115	113	97	85	89
	17	88	93	98	93	90	115	183	195	133	120	120	124	112	109	99	97	107	116	135	137	114	97	84	100
	18																								
Nov.	1913	98	105	99	91	97	120	185	166	144	128	116	102	101	94	94	103	104	113	143	198	161	195	85	88
	14	118	121	109	110	113	153	217	211	157	136	118	118	101	104	100	112	107	122	156	169	168	138	125	124
	15	94	91	92	92	96	127	200	183	130	105	90	89	89	83	86	78	79	84	121	129	114	97	91	95
	16	83	85	91	96	86	117	153	129	114	98	85	86	95	94	95	90	87	99	135	129	126	111	102	91
	17																								
	18																								
Dez.	1913	108	100	108	101	104	121	178	190	153	134	120	112	120	106	97	98	107	116	143	162	147	121	115	111
	14	113	123	114	101	106	132	196	202	152	126	117	99	93	95	99	107	105	122	158	184	146	132	124	115
	15	74	82	83	80	89	137	180	144	117	110	78	100	83	81	89	81	83	87	127	160	90	82	71	66
	16	100	103	105	100	106	129	173	178	135	118	123	123	108	107	105	119	119	150	177	145	138	112	108	98
	17																								
	18																								

Tabelle II.

Täglicher Gang des Potentialgefälles nach Ortszeit.

Mittel aus 1913/18. Stundenmittel in Volt pro Meter.

	a. m. 0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12	p. m. 12–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12	Zahl der verwendeten Monate
Januar	102	99	93	92	103	108	142	174	148	112	104	92	94	94	94	92	95	102	122	156	142	115	98	102	3
Februar	98	101	95	94	97	102	145	218	212	155	125	114	104	99	97	97	99	104	121	161	144	117	103	95	2
März	96	95	93	94	94	99	132	177	154	131	116	101	106	98	93	93	96	98	128	143	116	104	89	89	3
April	77	83	88	91	92	95	119	167	165	127	104	95	92	96	99	90	103	107	131	132	113	94	90	83	3
Mai	89	89	86	84	86	96	126	153	146	109	103	100	99	100	95	97	99	115	146	144	120	111	97	92	4
Juni	95	92	93	96	93	104	145	171	146	123	118	117	117	112	111	111	117	125	152	153	133	116	102	94	4
Juli	95	89	89	90	93	102	123	164	146	117	115	115	114	108	110	109	110	115	148	157	134	120	107	98	4
August	114	111	109	102	98	112	137	185	161	127	131	129	124	123	119	109	112	120	146	154	136	134	132	119	3
September	100	99	99	100	99	109	134	156	133	119	117	116	113	110	108	103	106	109	126	138	127	121	109	111	3
Oktober	91	92	94	92	87	107	163	171	125	117	99	97	96	89	90	86	94	103	117	125	106	95	87	93	4
November	98	100	98	97	98	129	189	172	138	117	102	99	97	94	94	96	94	105	139	156	142	118	101	99	4
Dezember	99	102	102	95	101	130	182	178	139	122	109	108	101	97	100	101	103	119	151	163	130	112	104	98	4
Jahr	96	96	95	94	95	108	145	174	151	123	112	107	105	102	101	99	102	110	136	149	129	113	102	98	
Differenz gegen das Jahresmittel = 114 Volt/m	—18	—18	—19	—20	—19	—6	+31	+60	+37	+9	—2	—7	—9	—12	—13	—15	—12	—4	+22	+35	+15	—1	—12	—16	

Tabelle III.

Monatsmittel des Potentialgefälles aus störungsfreien Stunden berechnet.

(Schönwetterwerte.)

Aufstellung: Luftelektrische Hütte. Sonde 1.80m über dem Boden.

	1913	1914	1915	1916	1917	1918	Mittel
Januar		115	121	—	—	—	118
Februar		122	119	—	—	—	121
März		104	109	126	—	—	113
April		100	106	113	—	—	106
Mai		100	115	92	112	—	105
Juni		—	116	117	113	122	117
Juli		—	124	142	96	108	118
August		—	149	111	115	—	125
September		—	111	108	126	—	115
Oktober		103	95	99	115	—	103
November	119	130	107	113	—	—	117
Dezember	124	127	98	128	—	—	119
Jahr			114	116			115

Tabelle IV.

A bedeutet Morgen-Maximum, *B* Abend-Maximum.

	Potentialgefälle 1913—18							Luftdruck 1903—8				
	Zeit				Höhe in Volt/m			Zeit			Höhe in mm	
	A	*B*	*A*−*B*		*A*	*B*	$\frac{A+B}{2}$	*A*	*B*	*A*−*B*	*A*	*B*
Jan.	7a 30m	7p 35m	12h 5m		174	156	165	8a 36	10p 45	14h 9m	0.88	1.03
Febr.	40	35	11 55		218	161	190	8 55	10 55	14 0	0.90	1.10
März	30	30	12 00	11h 48m	177	143	160	9 00	10 45	13 45	1.04	1.11
April	45	15	11 30		167	132	150	9 15	10 45	13 30	1.06	1.15
Mai	40	15	11 35		153	146	150	9 20	10 30	13 10	1.13	1.14
Juni	30	20	11 50	11 43	171	153	162	9 30	10 20	12 50	1.11	1.11
Juli	35	20	11 45		164	164	160	9 10	10 25	13 15	1.01	1.09
Aug.	30	20	11 50		185	154	170	9 10	10 30	13 20	1.10	1.14
Sept.	30	30	12 00	12 00	156	138	147	9 00	10 30	13 30	1.09	1.08
Okt.	20	30	12 10		163	125	144	8 55	10 30	13 35	1.02	1.10
Nov.	15	30	12 15		189	156	173	8 30	10 30	14 00	0.98	1.06
Dez.	15	25	12 10	12 10	182	163	173	8 20	10 35	14 15	0.84	1.00
Jahr			12 5							14 9		

Die Wirkung des Regens auf die Registrierung des Potentialgefälles der Atmosphäre.

Von

G. Angenheister.

(Nachtrag zum vorstehenden Artikel.)

Die Änderung des Potentialgefälles während des Regens ist für die Erklärung der Regenelektrizität von großer Bedeutung. Man vermutet, daß beim Fallen von positiv geladenem Regen ein Überfluß von negativ geladenem Regen in der Luft zurückbleibt und umgekehrt. Diesem Überschuß entsprechend soll das Potentialgefälle am Boden ein der Regenladung entgegengesetztes Vorzeichen haben (Elster und Geitel, Phys. Ztschr. 1913 S. 1292). Die Erfahrung bestätigt diese Forderung nur sehr unvollkommen. Bei der Registrierung des Potentialgefälles werden nun Sondenträger benutzt, die senkrecht zu einer Hauswand diese durchsetzen. Die Sondenträger werden vom Regen getroffen. Die dadurch zugeführte elektrische Ladung, sowie der Abtransport von Ladung vom Sondenträger durch abtropfenden Regen kann die Registrierung des Potentialgefälles fälschen und so den Zusammenhang zwischen Regenladung und Gefälle verdecken. Diese Fehlerquelle soll im folgenden untersucht werden. Ferner ergaben sich bei dieser Untersuchung einige neue Einblicke über die Vorgänge im elektrischen Feld an der Sonde und dem Sondenträger, die wohl selbständigen Wert besitzen.

Bei den folgenden Überlegungen soll die Anordnung zugrunde liegen, die bei Registrierungen des Potentialgefälles vielfach üblich ist. Der Sondenträger sei ein 1—2 m langes etwa 2 cm dickes Metallrohr, das in der Mitte der Außenseite einer vertikalen Wand senkrecht zu ihr heraus ragt. Die Vorrichtung zur Registrierung befinde sich innerhalb des Hauses.

I. Der Elektrizitätstransport zum Sondenträger.

Die Elektrizitätsmenge, die dem Sondenträger außerhalb des Hauses während der Zeit *dt* durch Sondenwirkung zufließt, sei

de_1, diejenige durch den elektrischen Leitungsstrom der Luft de_2, durch Regenzufluß de_4, durch abtropfenden Regen de_3. Das Potential des ganzen Systems, Sondenträger, Elektrometer etc. sei V_s; die Kapazität desselben C. Es ist dann

$$\frac{C\,dV_s}{dt} = \frac{de_1 + de_2 + de_3 + de_4}{dt}.$$

Die Kapazität C des Systems sehen wir im folgenden als konstant an; als unabhängig vom Potential, unabhängig von Raumladungen, die den Sondenträger umgeben.

1. Sondenwirkung.

Die Erfahrung bestätigt, daß die Sonde, wie ein Widerstand w_1, dem Ausgleich der Potentialdifferenz Luft — Sonde $V_l - V_s$ entgegensteht. Somit kann man schreiben:

$$de_1 = C\,dV_s = \frac{1}{w_1}(V_l - V_s)\,dt.$$

V_l ist das Potential der Luft in der Nähe der Sonde. Nennt man t_1 die Halbwertladezeit, (die Zeit, in der bei konstantem Luftpotential das Sondenpotential von Null auf das halbe Luftpotential steigt), so ergibt die Integration der obigen Gleichung

$$w_1 = \frac{t_1}{C \ln 2}.$$

2. Der Elektrizitätstransport durch Luftleitung.

Der Sondenträger wird sich auch ohne Sonde durch das längs seiner Oberfläche vorhandene Gefälle und infolge der Leitfähigkeit der Luft aufladen. Zur Zeit $t = 0$ sei das Potential des Sondenträgers ohne Sonde $V_{s,0} = 0$. Dies Potential herrscht auch an der Hüttenwand. An der Spitze des Sondenträgers besteht in der Luft das Potential V_l.

Infolge der Deformation der Äquipotentialflächen durch Wand- und Sondenträger besteht somit senkrecht zum Sondenträger, ein Gefälle, das längs seiner Länge von der Wand zur Spitze des Sondenträgers wächst.

An der Wand ist der Abstand der Äquipotentialflächen größer als an der Spitze. Zur Zeit $t = 0$ ist das Gefälle an der Hauswand $= 0$, an der Spitze $= \frac{V_l}{n}$. Es wird sich mit der Zeit ein Gleichgewichtszustand ausbilden, derart, daß bei positivem V_l gleich-

viel positive Ladung nahe der Spitze zum Sondenträger zuströmt, nahe der Hauswand vom Träger abströmt. Der Endwert von V_s ist durch die Gestalt der Äquipotentialflächen in der Nähe des Sondenträgers und durch die Verteilung der Ladung auf dem Sondenträger bedingt. Eine experimentelle Prüfung zeigte, daß in der gewohnten Anordnung: Sondenträger senkrecht zur Hüttenwand, der Sondenträger sich auf das halbe Luftpotential an der Spitze des Sondenträgers, also auf $\frac{1}{2} V_l$ aufladet.

Der Vorgang läßt sich somit darstellen durch

$$\frac{dV_s}{dt} = \alpha(\tfrac{1}{2} V_l - V_s).$$

Es ist dann

$$de_2 = C dV_s = \alpha C (\tfrac{1}{2} V_l - V_s)\, dt = \frac{1}{w_2}(\tfrac{1}{2} V_l - V_s)\, dt.$$

Da für $t = 0$ sein soll $V_s = 0$, so ergibt sich durch Integration

$$w_2 = \frac{t_2}{C \ln 2}$$

worin t_2 die Zeit bedeutet, in der sich der Sonderträger ohne Sonde auf $\frac{1}{4} V_l$ aufladet. t_2 kann experimentell bestimmt werden; t_2 ist natürlich von der Leitfähigkeit der Luft abhängig.

3. Der Elektrizitätstransport durch Regen.

Der Elektrizitätstransport durch Regen ist proportional der Regenstärke a, (Regenmenge pro sec) der spezifischen Regenladung b (Regenladung pro cm³ in ESE), und proportional der Auffangfläche $2\varrho l$, wo 2ϱ der Durchmesser und l die Länge des Sondenträgers ist.

$$de_3 = 2\varrho l a b\, dt = c\, dt, \quad \text{wo } c = 2\varrho l a b\,^{1)}.$$

4. Elektrizitätstransport durch abtropfenden Regen.

Der zufließende Regen tropft längs des Sondenträgers ab, und wirkt dadurch wie eine Reihe von Tropfkollektoren, die über die ganze Länge des Sondenträgers verteilt sind und an jeder Stelle dem Sondenträger das dort herrschende Luftpotential zu geben streben. Ebenso wie unter 2. (Luftleitung) wird auch hier der Entwert des Potentials des Sondenträgers (ohne Sondenwirkung) gleich $\frac{1}{2} V_l$. Der auf der ganzen Länge des Sondenträgers

1) Der Lenardeffekt durch Zerspritzen der auffallenden Tropfen führt dem Sondenträger weniger als 0.1 ESE positiver Ladung pro cm³ Regen zu, und kann hier wohl vernachlässigt werden.

abtropfende Regen wirkt angenähert wie ein Tropfkollektor auf halber Länge. Der Vorgang wird somit dargestellt durch

$$de_4 = \frac{1}{w_4}(\tfrac{1}{2}V_l - V_s)\,dt \quad \text{worin} \quad w_4 = \frac{t_4}{C \ln 2}.$$

t_4 läßt sich bei geeigneter Anordnung bestimmen. t_4 und w_4 sind von der Tropfenzahl und Tropfengröße abhängig. Für reichliche Tropfenzahl wird t_4 die Größenordnung der Halbwertzeit eines Tropfkollektors haben.

Eine Schätzung des Wertes von t_4 läßt sich folgendermaßen erreichen. Die durch einen Tropfen fortgeschaffte Ladung hängt von der Ladungsdichte des Sondenträgers an der Berührungsstelle ab. Dieser befindet sich in einem inhomogenen influenzierenden Felde; seine Flächendichte ist dadurch beeinflußt und infolgedessen längs seiner Länge variabel; in jedem Punkte proportional dem Gradienten $\frac{\partial V}{\partial h}$ senkrecht zur Oberfläche des Sondenträgers. Diese influenzierte Flächendichte beschleunigt den Ausgleich.

Sieht man zunächst von der influenzierten Flächendichte ab, so ist im feldfreien Raum die Flächendichte der Eigenladung auf dem zylinderförmigen Sondenträger bei Vernachlässigung der Wirkung der Enden

$$\delta = \frac{V_e}{4\pi\varrho \ln \frac{l}{\varrho}}.$$

Die Ladung des abfallenden Tropfens ist dann $e = 4r^2\pi\alpha\delta$ worin α ein Koeffizient ist, der der Influenzwirkung zwischen Sondenträger und Tropfen bei der Berührung Rechnung trägt. α ist von 1 wenig verschieden. Bei der Berührung zweier Kugeln, von denen die eine (δ_1) klein im Verhältnis zur anderen (δ_2) ist, gilt

$$\delta_1 = \frac{\pi^2}{6}\delta_2 = 1.6.\delta_2.$$

Die Ladung, die durch n-Tropfen von dem im Erdfeld befindlichen Sondenträger fortgeführt wird, ist dann, (ohne Berücksichtigung der durch das Erdfeld influenzierten Flächendichte)

$$de'_4 = \frac{n\alpha r^2}{\varrho \ln \frac{l}{\varrho}}(\tfrac{1}{2}V_l - V_s)\,dt.$$

Durch Vergleich mit der obigen Gleichung für de_4 ergibt sich dann

$$w'_4 = \frac{\varrho \ln \frac{l}{\varrho}}{n\alpha r^2}; \quad t'_4 = w'_4 C \ln 2.$$

Für die tatsächliche Flächendichte gilt

$$\delta' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial h}.$$

Ein Mittelwert $\left(\frac{\partial V}{dh}\right)_m$ für den Gradienten läßt sich aus der Halbwertzeit für Luftleitung (siehe 2.) unter Annahme des Ohmschen Stromes errechnen. Es gilt dann für Luftleitung

$$\frac{de_2}{dt} = \frac{C\,dV_s}{dt} = 2\pi\varrho l\lambda\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_m = 2\pi\varrho l\lambda\frac{(\frac{1}{2}V_l - V_s)}{h} = \frac{1}{w_2}(\tfrac{1}{2}V_l - V_s),$$

$$w_2 = \frac{h}{2\pi\varrho l\lambda} = \frac{t_2}{C\ln 2};$$

da t_2 und λ gemessen werden können, ist die Hilfsgröße h bestimmbar. Dann ist der Mittelwert für

$$\delta' = \frac{1}{4\pi}\frac{\frac{1}{2}V_l - V_s}{h}$$

$$de_4 = 4r^2\pi\delta'\alpha n\,dt = \frac{n\alpha r^2}{h}(\tfrac{1}{2}V_l - V_s)\,dt = \frac{1}{w_4}(\tfrac{1}{2}V_l - V_s)\,dt$$

$$w_4 = \frac{h}{n\alpha r^2};\quad t_4 = w_4 C\ln 2.$$

Die Berechnung zeigt, daß in der üblichen Anordnung t_4 etwa $3\frac{1}{2}$ mal kleiner ist als t_4' im feldfreien Raume; daß sich der Ausgleich infolge der induzierten Ladung etwa $3\frac{1}{2}$ mal schneller vollzieht als ohne dieselbe. Wegen der Unsicherheit der Rechnung infolge vereinfachender aber nur näherungsweise richtiger Annahmen ist es ratsam t_4 experimentell durch eine Reihe künstlicher Abtropfstellen längs des Sondenträgers zu bestimmen.

Der gesamte Elektrizitätstransport zum Sondenträger wird nun dargestellt durch

$$\text{(I)}\quad \left[\frac{1}{w_1}(V_l - V_s) + \frac{1}{w_2}\left(\frac{V_l}{2} - V_s\right) + \frac{1}{w_4}\left(\frac{V_l}{2} - V_s\right) + c\right]dt = C\,dV_s$$

löse ich dies nach V_l auf und setze

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_4} = \frac{1}{w} \quad\text{und}\quad \frac{1}{w_1} + \frac{1}{2w_2} + \frac{1}{2w_4} = \frac{1}{w'}$$

und ferner, $wC = \tau$ und $w'C = \tau'$ dann ist

$$V_l = V_s\frac{\tau'}{\tau} + \tau'\frac{dV_s}{dt} - \tau'\frac{c}{C}$$

τ und τ' haben die Dimension der Zeit.

Diese Gleichung erlaubt die Bestimmung des Luftpotentials

aus der Registrierung des Sondenpotentials, aus der V_s und $\frac{dV_s}{dt}$ zu entnehmen sind; außerdem müssen Regenladung, Regenstärke und Leitfähigkeit der Luft bekannt sein und für den betrachteten Zeitraum als konstant augenommen werden.

II. Regenwirkung auf den Sondenträger.

Um zu bestimmen, wie bei vorgegebenem Verlauf des Luftpotentials $V_l = \Phi(t)$ das Sondenpotential durch die Regenwirkung gefälscht wird, muß man

$$\text{(II)} \qquad \frac{dV_s}{dt} + \frac{1}{\tau} V_s - \frac{1}{\tau'} V_l - \frac{c}{C} = 0$$

nach V_s auflösen; hierzu setze ich $V_s = \varphi(t) z$, wo $\varphi(t)$ eine unbekannte Funktion von t ist; differentiiert und in (II) eingesetzt, ergibt sich

$$\frac{\varphi(t)\, dz}{dt} + z\left(\frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}\varphi(t)\right) - \frac{1}{\tau'} V_l = \frac{c}{C},$$

da $\varphi(t)$ eine willkürliche Funktion von t ist, so kann ich $\varphi(t)$ so wählen, daß

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}\varphi(t) = 0.$$

Diese Gleichung aufgelöst ergibt $\varphi(t) = e^{-\int \frac{1}{\tau} dt}$; dann ergibt sich

$$V_s = \text{const}\, e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \int e^{\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{\tau'} V_l + \frac{c}{C}\right) dt.$$

Wenn man annimmt, daß sich das Luftpotential für den betrachteten Zeitraum linear ändert, daß also $\frac{dV_l}{dt} = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \text{const} = \alpha$ im Integrationsbereich $t = 0$ bis $t = t$, so läßt sich das obige Integral durch partielle Integration in eine einfachere Form überführen. Es sei $V_{l,t}$ und $V_{l,0}$ der Wert des Luftpotentials zur Zeit $t = t$ nnd $t = 0$; $V_{l,t} = V_{l,0} + \alpha t$. Die Integrationskonstante ist so zu wählen, daß für $t = 0$ $V_s = V_{s,0}$. Es wird dann

$$\text{(III)} \quad V_s = V_{s,0} e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\left(\frac{\tau}{\tau'} V_{l,0} + \frac{c}{C}\tau - \alpha\frac{\tau^2}{\tau'}\right) + \frac{\tau}{\tau'}\alpha t.$$

Aus dieser Gleichung kann das Sondenpotential berechnet werden, wenn das Anfangspotential der Sonde $V_{s,0}$ und das Luftpotential

am Anfang und Ende des Integrationszeitraumes ($V_{s,0}$ und $V_{s,t}$) gegeben sind. Ferner müssen Regenladung, Regenstärke und die Apparatkonstanten $l, \varrho, r, C, w_1, w_2, w_3$ bekannt sein. Die obige Gleichung für V_s läßt sich in die bekannte Gleichung für die Sondenwirkung bei konstantem Luftpotential überführen, wenn man den Einfluß des Regens und der Luftleitung vernachlässigt.

Für $b = 0, \quad \varkappa = 0, \quad \frac{1}{w_2} = 0, \quad \alpha = 0, \quad V_{s,0} = 0$

wird
$$V_s = \left(1 - e^{-\frac{t}{w_1 C}}\right) V_l$$

Andererseits bei Vernachlässigung der Sondenwirkung, der Luftleitung und des Abtropfeffektes muß nur die Wirkung des zufließenden Regens eintreten.

Für $\frac{1}{w_1} = 0, \quad \frac{1}{w_2} = 0, \quad \varkappa = 0$ wird $\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tau = t$

(als Reihe entwickelt und bei Vernachlässigung von $\frac{\tau \frac{t^2}{\tau^2}}{1 \times 2}$ und höherer Glieder). Für $t = 0$ sei $V_{s,0} = 0$; dann ist $V_{s,t} = \frac{i}{C} t$; der Sondenträger wirkt als Auffangschüssel für elektrischen Regen.

III. Diskussion der Gleichung III.

Bei konstantem Luftpotential $\alpha = 0$ wird für eine bestimmte konstante Regenladung, Regenstärke und Leitfähigkeit das Sondenpotential sich asymptotisch einem Grenzwert $V_{s,\infty}$ nähern. Diesen erhalten wir, wenn wir in III $\alpha = 0$ und $t = \infty$ setzen, oder wenn ich in II die Gleichgewichtsbedingung $\frac{dV_s}{dt} = 0$ einführe.

$$\text{IV.} \qquad V_{s\infty} = \frac{\tau}{r} V_l + \frac{[illegible]}{C} \tau.$$

Aus III ergibt sich, daß dieser Grenzwert nach einer Zeit $t = 3\tau$ schon auf 5 %, nach einer Zeit $t = 4\tau$ sogar auf 2 % erreicht ist. 3τ und 4τ betragen nur wenige Minuten und sind von der Größenordnung der Halbwertladezeit der Sonde. Wir können daher bei konstantem Luftpotential unsere Betrachtung auf den leichtübersehbaren Grenzwert $V_{s\infty}$ beschränken. Für ein linear veränderliches Luftpotential $\frac{dV_l}{dt} = \alpha$ gilt III. Dieser Einschrän-

kung $\alpha =$ const. kann man wohl immer dadurch begegnen, daß der Integrationszeitraum so klein gewählt wird, daß $\frac{dV_l}{dt} =$ const. nahe erfüllt ist.

Für $t = 4\tau$ erhalten wir aus (III)

$$V_{s, T_4} = 0.02\, V_{s,0} + 0.98\, V_{s,\infty} + 3.02\, \alpha \frac{\tau^2}{\tau'}.$$

Bei linear veränderlichem Luftpotential unterscheidet sich das Sondenpotential praktisch schon nach einer Zeit $t = 3\tau$ von dem vorher besprochenen $V_{s\,\infty}$ nur um $2\alpha \frac{\tau^2}{\tau'}$; für $t = 4\tau$ um $3\alpha \frac{\tau^2}{\tau'}$ u. s. w. Das Potential der Sonde ändert sich von da ab nur noch linear mit einer Geschwindigkeit, die nur von $\alpha = \frac{dV_l}{dt}$ und von der Regenstärke a, nicht mehr von der Regenladung b abhängt. Zur Zeit $t = 4\tau$ ist der durch Regenfall entstandene Fehler in V_s schon vollständig zu übersehen.

Der Integrationsraum braucht also nicht größer zu sein als T_4. Für diese wenigen Minuten wird die Bedingung, daß α, a und b konstant sind, leicht erfüllt sein.

IV. Berechnung der Regenwirkung.

Um den Einfluß der Regenwirkung ziffernmäßig festzulegen, sollen folgende Werte zugrunde gelegt werden:

$C = 100$ cm, $\varrho = 1$ cm, $l = 200$ cm, $t_1 = 60$ sec, $t_2 = 500$ sec, $r = 0.3$ cm, a von 0 bis 0.05 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, b von $+5$ bis -5 ESE pro cm³;

$$V_{l,0} = 100 \text{ Volt}, \quad \alpha = \frac{dV_l}{dt} = 1 \frac{\text{Volt}}{\text{sec}}.$$

Es wird dann die Sonde wirken mit der Halbwertladezeit $t_1 = 60$ sec, die Leitfähigkeit der Luft wie eine Sonde auf halber Länge des Sondenträgers und einer Halbwertladezeit $t_2 = 500$ sec.

Ein starker, aber nicht außergewöhnlicher Regen von etwa 0.001 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ wird dann durch Abtropfen vom Sondenträger (4 Tropfen pro sec) ebenfalls wirken wie eine Sonde auf halber Länge des Sondenträgers und zwar mit einer Halbwertladezeit $t_4 = 200$ sec. Aus (IV) ergeben sich als praktischer Gleichgewichtszustand (nach $t = 4\tau$) für verschiedene Regenstärken und Regenladungen die Sondenpotentiale der nachfolgenden Tabellen. Die benutzten Regen-

stärken und Regenladungen entsprechen Stromstärken des vertikalen Konvektionsstromes von 3.3×10^{-16} bis $1.6 \times 10^{-12} \frac{\text{Amp.}}{\text{sec cm}^2}$; also vom schwach geladenen Landregen bis zum äußerst stark geladenen Gewitterregen. Die Stromstärke für $36 \frac{\text{mm}}{\text{h}}$ Regenstärke und 5 bis 0.1 ESE Regenladung beträgt 1.6×10^{-12} bis 3.3×10^{-14} $\frac{\text{Amp.}}{\text{sec cm}^2}$.

Tabelle I zeigt, daß trotz konstantem Luftpotential bei unelektrischem Regen das Sondenpotential abnimmt, um so mehr je stärker der Regen (Abtropfeffekt) ist. Bei positivem Regen steigt das Sondenpotential. Bei negativem Regen sinkt das Sondenpotential. Bei konstantem Luftpotential folgt also das Sondenpotential der Regenladung. Je kleiner die Halbwertladezeit der Sonde ist, um so kleiner ist der durch die Regenwirkung entstehende Fehler. Für ein veränderliches Luftpotential betrachtet man am besten das Sondenpotential zu einer Zeit, zu der sich das Sondenpotential nur noch linear mit der Zeit ändert. Für unsere Anordnung ist dieser Zeitpunkt für alle in Betracht kommenden Regenstärken und Regenladungen nach 5 min erreicht.

Das Sondenpotential zur Zeit $t = 4\tau = 308$ sec für Regenstärke null ist beigefügt. Mit ihm sind die übrigen Sondenpotentiale zu vergleichen.

Tabelle II zeigt, daß auch bei veränderlichem Luftpotential das Sondenpotential bei ungeladenem Regen durch den Tropfeffekt herabgemindert wird. Ebenso wie bei konstantem Potential erhöht auch bei veränderlichem Luftpotential positiver Regen das Sondenpotential, negativer vermindert es; um so schneller, je stärker der Regen und je höher seine Ladung. Ein entsprechendes Verhalten zeigt die Sonde bei negativem α.

Gleichung III zeigt auch den Weg, wie die Regenwirkung auf dem Sondenträger herabgemindert werden kann. Vor allem ist eine schnell wirkende Sonde wichtig (t_h muß möglichst klein sein), damit der Wirkung der Luftleitung und dem Abtropfeffekt begegnet wird; beide streben das Sondenpotential auf den halben Wert des Luftpotentials zu bringen. Dem Tropfeffekt kann auch dadurch begegnet werden, daß der Sondenträger ein wenig gegen die Horizontale geneigt wird, sodaß die Sonde etwas tiefer liegt; die meisten Tropfen werden dann in der Nähe der Sonde abtropfen und dadurch ihre Wirkung verstärken.

Man kann dem Sondenträger auch die Form einer Rinne geben.

Die zugeführte Regenladung ist abhängig von der Größe der Auffangfläche, die der Sondenträger darbietet. Anderseits ist aber auch die Größe des Abtropfeffektes von der Größe dieser Auffangfläche abhängig. Der Abtropfeffekt strebt die zugeführte Regenladung wieder abzuführen. Eine Verminderung der Auffangfläche durch einen möglichst dünnen Sondenträger nützt daher bei starkem Regen nicht sehr viel.

Wenn bei starkem Regen, 0.001 cm/sec und großer Regenladung 5 ESE pro cm^3 $\left(\text{gleich } 1.6 \times 10^{-12} \frac{\text{Amp.}}{\text{sec cm}^2}\right)$ das Sondenpotential dem Luftpotential auf 20 Volt folgen soll, so muß für $C = 100$ cm und selbst für eine Auffangfläche, die nur halb so groß ist als die bisher zugrunde gelegte ($\varrho = 0.7$ cm, $l = 150$ cm) die Halbwertladezeit der Sonde $t_h = 4$ sec sein. Dies ist auch bei den besten Sonden bisher nicht erreicht.

Das Ergebnis der Untersuchung ist also, daß der Regen die Registrierung des Potentialgefälles fälscht. Aus dem Vergleich der Registrierung des Potentialgefälles mit der Regenelektrizität können daher ohne Berücksichtigung dieser Fehler keine Schlüsse gezogen werden.

Die Theorie der Regenelektrizität verlangt bei positivem Regen fallendes Gefälle, bei negativem steigendes. Die Beobachtung des Regens in Potsdam zeigte bei 94 Boen 15 mal für die ganze Dauer entgegengesetztes, 7 mal gleichnamiges und 72 mal teils gleichnamiges, teils entgegengesetztes Vorzeichen von Regenladung und Gefälle (Kähler, Meteorolog. Beobachtungen, Potsdam 1908). Unsere Untersuchung zeigt, daß der Regen bei horizontalem Sondenträger und gleichmäßig verteilten Abtropfstellen auf den Sondenträger so wirkt, daß das Sondenpotential der Regenladung zu folgen strebt, sowohl bei konstantem wie auch veränderlichem Gefälle. Bei unelektrischem Regen strebt das Sondenpotential dem halben Wert des Luftpotentials an der Sonde zu.

Sondenpotential bei Regen.

$$V_{l,0} = 100 \text{ Volt}; \quad \frac{dV}{dt} = 0.$$

Regen-Dichte $\frac{mm}{h}$	Regenladung pro cm³ in ESE							
	+ 5	+ 1	+ 0.1	0	— 0.1	— 1	— 5	$t = 4\tau$
0				95				308s
0.36	100	96	95	95	95	94	90	308
3.6	144	104	95	94	93	84	44	300
36	470	162	93	85	77	8	— 300	240
180	1069	269	89	69	49	— 131	— 931	132

$$V_{l,0} = 100 \text{ Volt}; \quad \frac{dV_l}{dt} = +1 \frac{\text{Volt}}{\text{sec}}; \quad t = 4\tau.$$

0				317			
3.6	354	314	305	304	303	294	254
36	623	315	246	238	230	161	— 147

Über einige zahlentheoretische Funktionen.

Von

Edmund Landau.

Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Juni 1924.

Einleitung.

Es sei $r > 0$,

$$\sigma_r(n) = \sum_{d/n} d^r, \quad \sigma_{-r}(n) = \sum_{d/n} d^{-r}.$$

In einer neueren Arbeit[1]) beschäftigt sich Herr B. M. Wilson damit,

$$\Phi(x, r) = x^r \sum_{n \leqq x} \sigma_{-r}(n) - \sum_{n \leqq x} \sigma_r(n) = \sum_{n \leqq x} (x^r - n^r) \sigma_{-r}(n)$$

$$= \frac{r}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{x^{s+r}}{s(s+r)} \zeta(s) \zeta(s+r) \, ds$$

möglichst gut abzuschätzen; d. h., wenn

$$P(x, r) = \sum_{s = -r,\ 0,\ 1-r,\ 1} \text{Res.} \frac{r x^{s+r}}{s(s+r)} \zeta(s) \zeta(s+r),$$

$$R(x, r) = \Phi(x, r) - P(x, r)$$

gesetzt wird, für ein möglichst kleines a_r (und dann für ein möglichst kleines b_r)

$$R(x, r) = O\left(x^{a_r} \log^{b_r} x\right)$$

zu beweisen.

Mit Hilfe verschiedener analytischer Methoden gelingt es ihm, die auf elementarem Wege durch Ramanujan erlangten Schranken für $0 < r < 1$ und für $1 < r < \frac{\sqrt{89} - 3}{4}$ zu erniedrigen; für $r = 1$ hatte ich, wie er auch erwähnt,

(1) $$R(x, r) = O\left(x^{\frac{2}{5}}\right)$$

---

1) *An asymptotic relation between the arithmetic sums* $\sum_{n \leqq x} \sigma_r(n)$ *and* $x^r \sum_{n \leqq x} \sigma_{-r}(n)$ [Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Bd. XXI (1922), S. 140—149].

in einer Arbeit[2]) bewiesen, auf die er mehrfach Bezug nimmt. Um so erstaunlicher ist es, daß ihm nicht nur der Haupthilfssatz meiner Arbeit[3]), der mir seitdem ein dauerndes Handwerkszeug geworden ist[4]), unbekannt ist, sondern daß er sogar die entsprechende, um einen logarithmischen Faktor verschlechterte Ungleichung bei seinem Lemma 2 neu beweist. Dabei kommt es in seiner Arbeit auch auf Logarithmuspotenzen an[5]); er hätte an den betreffenden Stellen den Logarithmus sparen können, wenn er auf meinen Hilfssatz geachtet hätte. Sein Lemma 2 lautet, wenn der Druckfehler u bei der oberen Integrationsgrenze in U verbessert wird und die offenbar vergessenen[6]) Voraussetzungen w reell, $U > 1$ (oder $U > 2$?) eingeführt werden:

Für $\gamma \geqq -\frac{1}{2}$, $U > 1$ und reelles w ist

$$(2) \qquad \left| \int_1^U u^\gamma e^{\pm iu(\log u - w)} du \right| < \begin{cases} K U^{\frac{1}{2}+\gamma}, & \text{falls } \gamma > -\frac{1}{2}, \\ K \log U, & \text{falls } \gamma = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

wo K zwar von γ, aber nicht von U und w abhängt.

Dies leitet er durch partielle Integration aus dem von mir an anderem Orte[7]) bewiesenen Spezialfall $\gamma \geqq 0$ her. Im Falle $\gamma = -\frac{1}{2}$ kommt so allerdings nur die Schranke $K \log U$ heraus; mein Hilfssatz[8]) lautet jedoch wörtlich: Für $\omega \geqq 0$, $\varkappa \gtreqless 0$ ist

$$\left| \int_0^\omega t^{-\frac{1}{2}} e^{-2ti\log t + \varkappa ti} dt \right| < 18;$$

2) Besprechung von S. Wigert: *Sur quelques fonctions arithmétiques* [Göttingische gelehrte Anzeigen, Bd. CLXXVII (1915), S. 377—414], § 11.

3) A. a. O., § 2 (S. 381—384).

4) Meine ganzen Arbeiten *Über Dirichlets Teilerproblem* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1915, S. 317—328] und *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen (zweite Abhandlung)* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1915, S. 209—243], an die so manches Spätere angeknüpft hat, bauten sich auf jenem Hilfssatz (der auf S. 323 bezw. S. 221 entscheidend eingreift) auf; er ist mit Beweis als Satz 204 (S. 124—126) meines Buches *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale* [Leipzig und Berlin, 1918] wiedergegeben.

5) Vergl. seine Bemerkung auf S. 149, Z. 5—7.

6) Ohne sie kann von einer entsprechenden Behauptung offenbar keine Rede sein. In Herrn Wilsons Anwendungen ist natürlich w reell, $U > 1$; für sie ist $U > 2$ ausreichend.

7) *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1912, S. 687—771], S. 707—709.

8) A. a. O. (Anm. 3)).

dies liefert mit $t = \frac{u}{2}$ sofort[9])

$$\left|\int_0^U u^{-\frac{1}{2}} e^{\pm iu(\log u - w)} du\right| < 18\sqrt{2} \quad \text{für} \quad U > 0, \quad w \gtreqless 0,$$

also

$$(3) \quad \left|\int_1^U u^{-\frac{1}{2}} e^{\pm iu(\log u - w)} du\right| < K \qquad \text{für} \quad U > 1, \quad w \gtreqless 0$$

mit absolut konstantem K; daraus folgt nach dem zweiten Mittelwertsatz (oder durch partielle Integration) auch für $\gamma \geqq -\frac{1}{2}$

$$\left|\int_1^U u^\gamma e^{\pm iu(\log u - w)} du\right| < K U^{\frac{1}{2} + \gamma}$$

mit einem absolut konstanten (also auch von γ freien) K. (3) ist natürlich besser als der Spezialfall $\gamma = -\frac{1}{2}$ von (2); denn für $U > 2$ ist dies klar, und für $1 < U \leqq 2$ ist nur

$$\left|\int_1^U u^{-\frac{1}{2}} du\right| < U - 1 < K \log U$$

zu ergänzen.

Zum Überfluß: 1) Zu Beginn seines § 6 bemerkt Verf., die Methode seines § 5 sei die natürliche Verallgemeinerung meines Beweises von

$$(4) \qquad R(x, 1) = O\left(x^{\frac{2}{5} + \varepsilon}\right)$$

(in § 4 der Wigert-Besprechung). In jenem § 4 verwende ich allerdings nicht meinen Hilfssatz, sondern das am Schluß des § 2 gegebene Korollar

$$(5) \quad \left|\int_1^\omega t^{-\frac{1}{2} + \delta} e^{-2ti\log t + \varkappa t i} dt\right| < 60\,\omega^\delta \text{ für } \omega > 1, \ \varkappa \gtreqless 0, \ \delta \geqq 0.$$

Dies Korollar enthält jedoch (indem der Wert der Konstanten gleichgültig ist) für $\delta = 0$ wiederum den Hilfssatz selbst; übrigens

---

9) Z. B. in meiner *Einführung* heißt der Hilfssatz schon

$$\left|\int_0^U u^{-\frac{1}{2}} e^{-ui(\log u - \mu)} du\right| < 26$$

für $U > 0$, $\mu \gtreqless 0$.

für $\delta \geqq 0$ alsbald

$$\left|\int_{\frac{1}{2}}^{\omega} t^{-\frac{1}{2}+\delta} e^{-2ti\log t + xti}\, dt\right| \begin{cases} < 60\omega^{\delta} + \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}+\delta}\, dt = 60\,\omega^{\delta} + \frac{1}{\frac{1}{2}+\delta} \leqq 62\,\omega^{\delta}, & \text{falls } \omega > 1, \\ < \int_0^{\omega} t^{-\frac{1}{2}+\delta}\, dt = \frac{\omega^{\frac{1}{2}+\delta}}{\frac{1}{2}+\delta} \leqq 2\omega^{\delta}, & \text{falls } \frac{1}{2} < \omega \leqq 1; \end{cases}$$

jedenfalls kommt also, $\delta = \frac{1}{2} + \gamma$, $t = \frac{u}{2}$ gesetzt, sofort die volle Formel (2) mit absolut konstantem K und ohne den Faktor $\log U$ aus (5) heraus.

2) In seiner Formel (7·2), falls r den dort zulässigen Wert $\frac{3}{2}$ hat, wendet Verf. die ihm gar nicht bekannte Ungleichung (3) (d. h. (2) ohne den Logarithmus) doch an!

Da Herr Wilson bereits den Beweis von (4) in meinem § 4, an den er anknüpft, so flüchtig besehen hat, wundere ich mich nicht mehr über seine Ansicht[10]), der Beweis von (1) in meinem § 11 sei auf $r = 1$ zugeschnitten und ungeeignet, z. B. für $\frac{1}{2} < r < 1$ sein (mit der Methode meines § 4 erhaltenes[11])) neues Ergebnis

$$R(x, r) = O\left(x^{\frac{(2r-1)(r+1)}{2r+3}+\varepsilon}\right)$$

zu

$$R(x, r) = O\left(x^{\frac{(2r-1)(r+1)}{2r+3}} \log^{b_r} x\right)$$

zu verschärfen. Ich werde jedoch in § 1 des Folgenden zeigen, daß meine damalige Methode für $\frac{1}{2} < r < 1$ ganz glatt

$$(6) \qquad R(x, r) = O\left(x^{\frac{(2r-1)(r+1)}{2r+3}}\right)$$

ergibt.

Aber der Exponent von x läßt sich überhaupt verkleinern. Um das Wesentliche meiner neuen Bemerkungen besser hervortreten zu lassen, will ich in § 2 und § 3 des Folgenden nur vom alten Fall $r = 1$ reden. Ich hatte zum Nachweis von (1) auf S. 412 meiner alten Arbeit die Wigertsche Identität

$$(7) \qquad R(x, 1) = \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{-1}(n)}{\sqrt{n}} J_1(4\pi\sqrt{nx})$$

10) S. 148, Z. 8—19.

11) In seiner Formel (3·8) fehlt rechts unter dem Integralzeichen der Faktor $(\pi^2 x)^{it}$, dessen Auftreten zwar wegen (2) nicht weiter stört, ohne den jedoch $x^{-\beta}\int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega} \frac{x^s}{s(s+r)} \zeta(s)\zeta(s+r)\, ds$ von x frei wäre.

(J_1 Besselsche Funktion) nicht nutzbar machen können (sondern an seine Identität

(8) $$\int_0^x R(y, 1)\,dy = \frac{x}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{-1}(n)}{n} J_2(4\pi\sqrt{nx})$$

angeknüpft).

In § 2 werde ich zeigen, daß aus (7) auf Anhieb

(9) $$R(x, 1) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$$

folgt (es ist $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$). In § 3 leite ich unter Benutzung der längst klassischen Weylschen Methode diophantischer Approximationen sogar

(10) $$R(x, 1) = O\left(x^{\frac{7}{23}} \log^{\frac{12}{23}} x\right)$$

her $\left(\text{es ist } \frac{7}{23} < \frac{1}{3}\right)$. Die neueren Methoden von Herrn van der Corput $\left(\text{die ihm z. B. beim Teilerproblem } \frac{1}{3} \text{ durch } \frac{163}{494} \text{ zu ersetzen gestatteten}\right)$ ziehe ich nicht heran.

§ 1.

Es sei

$$\tfrac{1}{2} < r < 1.$$

Über

$$F(x, r) = \sum_{n \leq x} \sigma_{-r}(n)$$

brauche ich nur die (schlechte) Abschätzung

(11) $$F(x, r) = \frac{1}{r} x^{1-r} P'(x, r) + O\left(x^{\frac{1}{2r+3}}\right),$$

die z. B. aus dem Hauptsatz meiner zweiten in Anm. 4) genannten Abhandlung folgt [12]). Diese schlechte Abschätzung (11) ist immer-

---

12) Jener Hauptsatz ist auf

$$L(x, r) = \sum_{n \leq x} \sigma_r(n)$$

anzuwenden $\left(\beta = r+1,\ \eta = r+1,\ \varkappa = (r+1)\frac{2r+1}{2r+3},\ A = 0,\ P = 1,\ g = 0\right)$ und das Ergebnis in

$$F(x, r) = r\int_1^x \frac{L(u, r)}{u^{r+1}}\,du + \frac{L(x, r)}{x^r}$$

einzuführen.

hin besser als die von Herrn Cramér[13]) angegebene

$$F(x, r) = \frac{1}{r} x^{1-r} P'(x, r) + O\left(x^{\frac{1}{2r+3}} \log^{1-r} x\right).$$

Ich nenne (11) schlecht, weil die triviale Abschätzungsmethode schon Berger[14]) sogar zu

$$F(x, r) = \frac{1}{r} x^{1-r} P'(x, r) + O\left(x^{\frac{1-r}{2}}\right) \tag{12}$$

geführt hat. $\left(\text{Es ist } \frac{1-r}{2} = \frac{1}{2r+3} - \frac{(2r-1)(r+1)}{2(2r+3)} < \frac{1}{2r+3}.\right)$

Ich will der Vollständigkeit wegen die triviale Begründung von (12) (also von (11)) reproduzieren.

Für $0 < \vartheta < 1$ ist bekanntlich

$$\sum_{n \leqq x} \frac{1}{n^{\vartheta}} = \frac{x^{1-\vartheta}}{1-\vartheta} + \zeta(\vartheta) + O\left(x^{-\vartheta}\right).$$

Hieraus folgt

$$F(x, r) = \sum_{ab \leqq x} \frac{1}{a^r} = \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{a^r} \left[\frac{x}{a}\right] + \sum_{b \leqq \sqrt{x}} \sum_{\sqrt{x} < a \leqq \frac{x}{b}} \frac{1}{a^r}$$

$$= \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{a^r} \frac{x}{a} + O \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{a^r} + \sum_{b \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{1}{1-r}\left(\frac{x}{b}\right)^{1-r} - \frac{1}{1-r}\left(\sqrt{x}\right)^{1-r}\right)$$
$$+ O \sum_{b \leqq \sqrt{x}} \left(\sqrt{x}\right)^{-r}$$

$$= x\left(\zeta(r+1) - \sum_{a > \sqrt{x}} \frac{1}{a^{r+1}}\right) + O\left(x^{\frac{1-r}{2}}\right) + \frac{x^{1-r}}{1-r} \sum_{b \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{b^{1-r}}$$
$$- \frac{1}{1-r}\left(\sqrt{x}\right)^{1-r}\left(\sqrt{x} + O(1)\right)$$

$$= x\left(\zeta(r+1) - \frac{1}{r}\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^r} + O\left(\left(\sqrt{x}\right)^{-r-1}\right)\right) + O\left(x^{\frac{1-r}{2}}\right)$$
$$+ \frac{x^{1-r}}{1-r}\left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^r}{r} + \zeta(1-r) + O\left(\left(\sqrt{x}\right)^{-1+r}\right)\right) - \frac{x^{1-\frac{r}{2}}}{1-r}$$

---

13) *Contributions to the Analytic Theory of Numbers* [Verhandlungen des V. Skandinavischen Mathematiker-Kongresses in Helsingfors 1922 (Helsingfors, 1923), S. 266—272], S. 270.

14) *Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres* [Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis, Ser. III, Bd. XIV (1891), No. 2, 130 S.], S. 54—60.

$$= \zeta(r+1)x + \frac{\zeta(1-r)}{1-r}x^{1-r} + O\left(x^{\frac{1-r}{2}}\right)$$

$$= \sum_{s=0,\,1-r,\,1} \text{Res.}\, \frac{x^s}{s}\zeta(s)\zeta(s+r) + O\left(x^{\frac{1-r}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{r}x^{1-r}P'(x,r) + O\left(x^{\frac{1-r}{2}}\right).$$

Ich setze

$$(G(s,r) =)\, G(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right)}.$$

Genau nach dem Beweisschema des Hilfssatzes 3 meiner zweiten in Anm. 4) genannten Abhandlung ergibt sich für $-\frac{r+1}{2} < \alpha < -r$

$$(13)\quad (L(w,r) =)\, L(w) = \int_{(\alpha)} G(s)\frac{w^{s+r+1}}{s(s+r)(s+r+1)}ds = O\left(w^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\right),$$

$$(14)\qquad L'(w) = \int_{(\alpha)} G(s)\frac{w^{s+r}}{s(s+r)}ds = O\left(w^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\right).$$

(Der Weg ist nämlich auf $\alpha = -\frac{3}{4} - \frac{r}{2}$ bezw. $\alpha = -\frac{1}{4} - \frac{r}{2}$ zu legen und (3) zu benutzen.)

Für $x > 0$ ist nun

$$\int_0^x R(y,r)\,dy = \int_0^x \Phi(y,r)\,dy - \int_0^x P(y,r)\,dy$$

$$= \frac{r}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^{s+r+1}}{s(s+r)(s+r+1)}\zeta(s)\zeta(s+r)\,ds - \int_0^x P(y,r)\,dy$$

$$= \frac{r}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \frac{x^{s+r+1}}{s(s+r)(s+r+1)}\zeta(s)\zeta(s+r)\,ds,$$

also (wegen $\alpha < -r$) auf Grund der Riemannschen Funktionalgleichung [15])

---

15) c_r bezeichnet in jeder Formel eine nur von r abhhängige komplexe Konstante, c eine absolute positive Konstante.

$$= c_r \int\limits_{(\alpha)} x^{s+r+1} \pi^{2s} \frac{G(s)}{s(s+r)(s+r+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{-r}(n)}{n^{1+r}} n^s ds$$

$$= c_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{-r}(n)}{n^2} \int\limits_{(\alpha)} G(s) \frac{(\pi^2 n x)^{s+r+1}}{s(s+r)(s+r+1)} ds \qquad ^{16)}$$

$$(15) \quad = c_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{-r}(n)}{n^2} L(\pi^2 n x).$$

(Diese Identität entspricht genau der Wigertschen (8); es ist das entsprechend definierte $L(w, 1) = c_1 w J_2(4\sqrt{w})$. Von (15) werde ich genau so zu (6) kommen wie a. a. O. von (8) zu (1).)

Zur Abkürzung sei

$$(16) \qquad z = x^{\frac{1}{2r+3}}.$$

Dann ist nach (15), (13), (14)

$$\int_x^{x+z} R(y, r)\, dy = c_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{-r}(n)}{n^2} \left(L(\pi^2 n x + \pi^2 n z) - L(\pi^2 n x)\right)$$

$$= O \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{-r}(n)}{n^2} \operatorname{Min.}\left((nx)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}},\ nz(nx)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\right)$$

$$(17) \quad = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} z \sum_{n \leqq \frac{x}{z^2}} \frac{\sigma_{-r}(n)}{n^{\frac{5}{4}-\frac{r}{2}}}\right) + O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \sum_{n > \frac{x}{z^2}} \frac{\sigma_{-r}(n)}{n^{\frac{7}{4}-\frac{r}{2}}}\right).$$

Wegen (11) ist

$$F(x, r) = \sum_{n \leqq x} \sigma_{-r}(n) = O(x),$$

also

$$(18) \qquad \sum_{n \leqq x} \frac{\sigma_{-r}(n)}{n^{\frac{5}{4}-\frac{r}{2}}} = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\right),$$

$$(19) \qquad \sum_{n > x} \frac{\sigma_{-r}(n)}{n^{\frac{7}{4}-\frac{r}{2}}} = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{4}}\right).$$

---

16) Die Vertauschung $\int \sum = \sum \int$ ist statthaft, da $\int_1^{\infty} t^{-2-2\alpha-r} dt$ wegen $\alpha > -\frac{r+1}{2}$ konvergiert.

Aus (17), (18), (19), (16) folgt

$$\int_x^{x+z} R(y,r)\,dy = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\, z\, \frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{z^{r-\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\, \frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{4}}}{z^{r-\frac{3}{2}}}\right)$$

$$(20) \qquad = O\left(x^{r-\frac{1}{2}}\, z^{\frac{3}{2}-r}\right) = O(z^3 x^{r-1}).$$

Für $x \leqq v \leqq x+z$ ist nach (11) gleichmäßig

$$r v^{r-1} F(v,r) - P'(v,r) = O\left(v^{r-1}\, v^{\frac{1}{2r+3}}\right) = O\left(z\, x^{r-1}\right);$$

wegen

$$\Phi(x,r) = \int_0^x r v^{r-1} F(v,r)\,dv$$

ist also

$$\int_x^{x+z} R(y,r)\,dy - z R(x,r) = \int_x^{x+z} (R(y,r) - R(x,r))\,dy$$

$$(21) \qquad = \int_x^{x+z} dy \int_x^y (r v^{r-1} F(v,r) - P'(v,r))\,dv = O(z^3 x^{r-1}).$$

Aus (20), (21) folgt endlich

$$R(x,r) = O(z^2 x^{r-1}) = O\left(x^{\frac{2}{2r+3}+r-1}\right) = O\left(x^{\frac{(2r-1)(r+1)}{2r+3}}\right),$$

und (6) ist bewiesen.

§ 2.

Ich nehme fortan $r = 1$ an und ziehe die weiteren Schlüsse aus (7). Wegen

$$J_1(w) = -c\,\frac{\cos\left(w+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{w}} + O\left(w^{-\frac{3}{2}}\right)$$

ist nach (7)

$$(22) \quad R(x,1) = -c\sqrt[4]{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{-1}(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \cos\left(4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Die weitere Untersuchung dreht sich also um die (bekanntlich konvergente) Reihe

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{-1}(n)}{n^{\frac{3}{4}}} e^{i\sqrt{nx}} \qquad (x > 0);$$

jede Relation

(23) $$S(x) = O(x^A \log^B x), \quad 0 \leqq A < \tfrac{3}{4}, \quad B \geqq 0$$

liefert nach (22) sofort

(24) $$R(x, 1) = O(x^{A+\frac{1}{4}} \log^B x).$$

Ich will gleich zeigen, daß (23), also (24) aus jeder für $x > 4$, $q \geqq 1$ gültigen Abschätzung[17])

(25) $$\left| \sum_{n=1}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c x^A \log^B x, \quad 0 \leqq A < \tfrac{3}{4}, \quad B \geqq 0$$

folgt. In der Tat ist nach (25) für $x > 4$, $m \geqq 1$

$$\left| \sum_{n=1}^{m} \frac{\sigma_{-1}(n)}{n^{\frac{3}{4}}} e^{i\sqrt{nx}} \right| = \left| \sum_{ab \leqq m} \frac{1}{a^{\frac{7}{4}} b^{\frac{3}{4}}} e^{i\sqrt{abx}} \right|$$

$$= \left| \sum_{a=1}^{m} \frac{1}{a^{\frac{7}{4}}} \sum_{b=1}^{\left[\frac{m}{a}\right]} \frac{e^{i\sqrt{abx}}}{b^{\frac{3}{4}}} \right| < \sum_{a=1}^{m} \frac{1}{a^{\frac{7}{4}}} c\,(ax)^A (\log a + \log x)^B$$

$$< c x^A \sum_{a \leqq x} \frac{\log^B x}{a^{\frac{7}{4}-A}} + c x^A \sum_{a > x} \frac{\log^B a}{a^{\frac{7}{4}-A}} < c x^A \log^B x.$$

Also brauche ich in diesem § 2 nur

$$\left| \sum_{n=1}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c x^{\frac{1}{12}} \text{ für } x > 4, \; q \geqq 1,$$

in § 3 nur

$$\left| \sum_{n=1}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c x^{\frac{5}{92}} \log^{\frac{12}{23}} x \text{ für } x > 4, \; q \geqq 1$$

zu beweisen, um (9) bezw. (10) festgestellt zu haben.

Hilfssatz 1[18]): *Es sei* $N \leqq N'$, $\varrho > 1$. *Für* $N \leqq u \leqq N'$ *sei* $f(u)$ *reell*, $0 \leqq f'(u) \leqq \gamma$, $-f''(u) \geqq \frac{1}{\varrho}$. *Dann ist*

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} e^{2\pi i f(n)} \right| < c(\gamma + 1)\sqrt{\varrho}.$$

17) Alle hier und später als Summationsgrenzen auftretenden Zahlen sind ganz.

18) Dieser Hilfssatz wurde fast ebenso einfach von Herrn van der Corput bewiesen: *Zahlentheoretische Abschätzungen* [Mathematische Annalen, Bd. LXXXIV (1921), S. 53—79], S. 58—59 und 62—64.

Beweis: Mit

$$Q_h = \int_N^{N'} e^{2\pi i f(u)} \cos 2\pi h u \, du$$

ist nach Dirichlet

$$\sum_{n=N}^{N'} e^{2\pi i f(n)} = \tfrac{1}{2} e^{2\pi i f(N)} + \tfrac{1}{2} e^{2\pi i f(N')} + Q_0 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} Q_h.$$

Für reelles $g(u)$ mit $-g''(u) \geqq \frac{1}{\varrho}$, $\varrho > 0$ ist bekanntlich [19])

$$\left| \int_N^{N'} e^{2\pi i g(u)} \, du \right| < c\sqrt{\varrho}.$$

Daher ist für $h \geqq 0$, wegen $-\frac{d^2}{du^2}(f(u) \pm hu) \geqq \frac{1}{\varrho}$,

$$|Q_h| = \tfrac{1}{2} \left| \int_N^{N'} e^{2\pi i (f(u) + hu)} du + \int_N^{N'} e^{2\pi i (f(u) - hu)} du \right| < c\sqrt{\varrho}.$$

Für $h > \gamma$ ist nach dem zweiten Mittelwertsatz (wegen der Monotonie von $f'(u)$)

$$|Q_h| = \left| \frac{1}{h} \int_N^{N'} e^{2\pi i f(u)} f'(u) \sin 2\pi h u \, du \right|$$

$$= \frac{1}{2h} \left| \int_N^{N'} e^{2\pi i (f(u) + hu)} f'(u) \, du - \int_N^{N'} e^{2\pi i (f(u) - hu)} f'(u) \, du \right|$$

$$= \frac{1}{4\pi h} \left| \int_N^{N'} \frac{f'(u)}{h + f'(u)} \, d e^{2\pi i (f(u) + hu)} + \int_N^{N'} \frac{f'(u)}{h - f'(u)} \, d e^{2\pi i (f(u) - hu)} \right|$$

$$< \frac{c}{h} \left(\frac{\gamma}{h+\gamma} + \frac{\gamma}{h-\gamma} \right) < \frac{c}{h} \frac{\gamma}{h-\gamma} < \frac{c\gamma}{(h-\gamma)^2}.$$

Folglich ist

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} e^{2\pi i f(n)} \right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c \left(\sum_{h=0}^{[\gamma]+1} \sqrt{\varrho} + \gamma \sum_{h=[\gamma]+2}^{\infty} \frac{1}{(h-\gamma)^2} \right)$$

$$< c + c(\gamma+1)\sqrt{\varrho} + c\gamma < c(\gamma+1)\sqrt{\varrho}.$$

---

19) Vergl. z. B. meine Abhandlung *Über die Gitterpunkte in einem Kreise (dritte Mitteilung)* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1920, S. 109—134], S. 118—119.

Hilfssatz 2: *Für* $q \geqq j \geqq \sqrt[3]{x} \geqq 1$ *ist*

$$\left| \sum_{n=j}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{j}} + c.$$

Beweis: 1) Es sei $q \leqq x^2$. Für $j \leqq N \leqq N' \leqq q$, $N' < 2N$ ist nach Hilfssatz 1 $\left(\text{mit } f(u) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{ux},\ f'(u) = \frac{1}{4\pi}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{u}},\ \gamma = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{N}},\right.$ $\left. -f''(u) = \frac{1}{8\pi}\frac{\sqrt{x}}{u^{\frac{3}{2}}},\ \varrho = \frac{8\pi(2N)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} > 1 \text{ wegen } N \geqq \sqrt[3]{x}\right)$

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} e^{i\sqrt{nx}} \right| < c\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{N}} + 1\right)\frac{N^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{x}},$$

also nach dem Abelschen Lemma

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right);$$

folglich durch Anwendung auf

$N = j,\ N' = 2j - 1;\ N = 2j,\ N' = 4j - 1;\ \ldots$, zuletzt jedoch $N' = q$

$$\left| \sum_{n=j}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{j}} + \frac{\log(x+1)}{\sqrt[4]{x}}\right) < c\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{j}} + c.$$

2) Es sei $q > x^2$. Dann ist, $q_0 = \text{Max.}(j, [x^2])$ gesetzt,

$$\left| \sum_{n=q_0}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2}\frac{e^{i\sqrt{q_0 x}}}{q_0^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{2}\frac{e^{i\sqrt{qx}}}{q^{\frac{3}{4}}} + \int_{q_0}^{q} \frac{e^{i\sqrt{ux}}}{u^{\frac{3}{4}}}du + \int_{q_0}^{q}\left(u - [u] - \frac{1}{2}\right) d\,\frac{e^{i\sqrt{ux}}}{u^{\frac{3}{4}}} \right|$$

$$\leqq 1 + \left| \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\int_{q_0 x}^{qx} \frac{e^{i\sqrt{v}}}{v^{\frac{3}{4}}} dv \right| + c\int_{q_0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,du}{u^{\frac{5}{4}}} < 1 + \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}c + \frac{c\sqrt{x}}{q_0^{\frac{1}{4}}} < c$$

und im Falle $j < [x^2]$ nach 1)

$$\left| \sum_{q=j}^{q_0 - 1} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{j}} + c.$$

Hauptsatz 1: *Für $x > 4$, $q \geqq 1$ ist*

$$\left|\sum_{n=1}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}}\right| < c x^{\frac{1}{12}};$$

also ist

(9) $$R(x, 1) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\right).$$

Beweis: 1) Falls $q \leqq x^{\frac{1}{3}}$, ist

$$\left|\sum_{n=1}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\left[x^{\frac{1}{3}}\right]} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} < c x^{\frac{1}{12}}.$$

2) Falls $q > x^{\frac{1}{3}}$, ist

$$\left|\sum_{n=1}^{\left[x^{\frac{1}{3}}\right]} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}}\right| < c x^{\frac{1}{12}}$$

und nach Hilfssatz 2

$$\left|\sum_{n=\left[x^{\frac{1}{3}}\right]+1}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}}\right| < c \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}} + c < c x^{\frac{1}{12}}.$$

§ 3.

Hilfssatz 3: *Wird*

$$e^{ti\sqrt{1+y}}\, e^{-ti(1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{16}y^3)} = e^{ti\sum\limits_{n=4}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}y^n} = \sum_{h=0}^{\infty} e_h(t)\, y^h$$
$$(0 \leqq y < 1)$$

gesetzt, so ist für $t \geqq 2$

$$\sum_{h=0}^{\infty} |e_h(t)| \left(t^{-\frac{1}{4}}\right)^h < c.$$

Beweis:

$$\sum_{h=0}^{\infty} |e_h(t)| \left(t^{-\frac{1}{4}}\right)^h \leqq e^{t\sum\limits_{n=4}^{\infty}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| t^{-\frac{n}{4}}} \leqq e^{\sum\limits_{n=4}^{\infty}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| 2^{-\frac{n-4}{4}}} = c.$$

Hilfssatz 4: *Es sei*

$$T \geqq 2,\ \mu > 0,\ v \geqq 1,\ \frac{\mu}{v} \leqq \left(T\sqrt{v}\right)^{-\frac{1}{4}},$$

$$R = \mu^{\frac{3}{4}} + \mu^{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{\sum_{h_1, h_2 = 1}^{\mu} \operatorname{Min.}\left(\mu, \frac{1}{\left|\sin \frac{3 T h_1 h_2}{16 v^{\frac{5}{2}}}\right|}\right)}.$$

Dann ist

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\mu-1} e^{Ti\sqrt{v+\nu}}\right| < cR.$$

Beweis: Wegen $0 \leqq \frac{\nu}{v} < \frac{\mu}{v} < 1$ ist

$$e^{Ti\sqrt{v+\nu}-\sqrt{v}} = e^{Ti\sqrt{v}\left(\sqrt{1+\frac{\nu}{v}}-1\right)}$$

$$= e^{Ti\sqrt{v}\left(\frac{1}{2}\frac{\nu}{v}-\frac{1}{8}\frac{\nu^2}{v^2}+\frac{1}{16}\frac{\nu^3}{v^3}\right)} \sum_{h=0}^{\infty} e_h(T\sqrt{v})\left(\frac{\nu}{v}\right)^h;$$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\mu-1} e^{Ti\sqrt{v+\nu}}\right| = \left|\sum_{\nu=0}^{\mu-1} e^{Ti(\sqrt{v+\nu}-\sqrt{v})}\right|$$

$$= \left|\sum_{h=0}^{\infty} e_h(T\sqrt{v})\left(\frac{\mu}{v}\right)^h \sum_{\nu=0}^{\mu-1}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^h e^{i\left(\frac{T}{2\sqrt{v}}\nu-\frac{T}{8v^{\frac{3}{2}}}\nu^2+\frac{T}{16v^{\frac{5}{2}}}\nu^3\right)}\right|.$$

Nach einem älteren Hilfssatz [20]) ist für jedes ganze $h \geqq 0$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^h e^{i\left(\frac{T}{2\sqrt{v}}\nu-\frac{T}{8v^{\frac{3}{2}}}\nu^2+\frac{T}{16v^{\frac{5}{2}}}\nu^3\right)}\right| < cR,$$

also nach Hilfssatz 3

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\mu-1} e^{Ti\sqrt{v+\nu}}\right| \leqq cR\sum_{h=0}^{\infty}\left|e_h(T\sqrt{v})\right|(T\sqrt{v})^{-\frac{h}{4}} < cR.$$

Hilfssatz 5: *Es sei*

$$T > 2,\ \ 3 \leqq N \leqq N' < 2N,$$

$$Z = \left(N^{\frac{25}{32}}T^{\frac{1}{16}} + N^{\frac{31}{32}}T^{-\frac{1}{16}}\log^{\frac{1}{2}} N\right)\log^{\frac{1}{4}} N.$$

Dann ist

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} e^{iT\sqrt{n}}\right| < cZ.$$

Beweis: 1) Es sei $N \leqq T^{\frac{2}{7}}$. Dann ist

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} e^{iT\sqrt{n}}\right| \leqq N'-N+1 \leqq N \leqq N^{\frac{25}{32}}T^{\frac{1}{16}} < Z.$$

---

20) Spezialfall $k = 3$ des Hilfssatzes 3 meiner Arbeit *Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen* [Mathematische Zeitschrift, Bd. XX (1924), S. 105—125], S. 108—109.

2) Es sei $N > T^{\frac{2}{7}}$. Dann ist,

(26) $$\mu = \left[N^{\frac{7}{8}} T^{-\frac{1}{4}}\right]$$

gesetzt,

$$1 \leqq \mu < N^{\frac{31}{32}} T^{-\frac{1}{16}} < Z.$$

Es werde noch

$$M = \left[\frac{N'-N}{\mu}\right]$$

gesetzt, so daß

(27) $$0 \leqq M < \frac{N}{\mu}.$$

21) Es sei $M = 0$ oder 1. Dann ist $N'-N \leqq 2\mu - 1$,

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} e^{iT\sqrt{n}}\right| \leqq N'-N+1 \leqq 2\mu < 2Z.$$

22) Es sei $M \geqq 2$. Ich setze

$$v_m = N + m\mu \text{ für } m = 0, 1, \ldots, M.$$

Dann ist

$$N \leqq v_0 \leqq v_m \leqq v_M \leqq N + \frac{N'-N}{\mu}\mu = N' < 2N,$$

$$\mu \leqq N^{\frac{7}{8}} T^{-\frac{1}{4}} \leqq v_m^{\frac{7}{8}} T^{-\frac{1}{4}},$$

(28) $$\frac{\mu}{v_m} \leqq \left(T\sqrt{v_m}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Wird

$$S_m = \left|\sum_{v=0}^{\mu-1} e^{iT\sqrt{v_{m-1}+v}}\right| \text{ für } m = 1, 2, \ldots, M$$

gesetzt, so ist, wegen $0 \leqq N'-N-M\mu < \mu$,

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} e^{iT\sqrt{n}}\right| = \left|\sum_{m=1}^{M} \sum_{v=0}^{\mu-1} e^{iT\sqrt{v_{m-1}+v}} + \sum_{v=0}^{N'-N-M\mu} e^{iT\sqrt{v_M+v}}\right|$$

(29) $$< \sum_{m=1}^{M} S_m + Z.$$

Wird

$$\Theta_m = \frac{3Th_1h_2}{16v_{m-1}^{\frac{5}{2}}} \text{ für } m = 1, 2, \ldots, M$$

gesetzt, so ist nach (28) und Hilfssatz 4

$$S_m < c\left(\mu^{\frac{3}{4}} + \mu^{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{\sum_{h_1,\,h_2=1}^{\mu} \operatorname{Min.}\left(\mu,\ \frac{1}{|\sin\Theta_m|}\right)}\right),$$

(30) $$\sum_{m=1}^{M} S_m < c M \mu^{\frac{3}{4}} + c\mu^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\sum_{h_1,\,h_2=1}^{\mu} \sum_{m=1}^{M} \operatorname{Min.}\left(\mu,\ \frac{1}{|\sin\Theta_m|}\right)}.$$

Hierin ist nach (27) und (26)

(31) $$M\mu^{\frac{3}{4}} < N\mu^{-\frac{1}{4}} < cNN^{-\frac{7}{32}} T^{\frac{1}{16}} < cZ,$$

(32) $$\mu^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}} < N^{\frac{3}{4}} \mu^{-\frac{1}{2}} < cN^{\frac{3}{4}} N^{-\frac{7}{16}} T^{\frac{1}{8}} = cN^{\frac{5}{16}} T^{\frac{1}{8}}.$$

Bei festen h_1, h_2 wird

(33) $$\sum_{m=1}^{M} \operatorname{Min.}\left(\mu,\ \frac{1}{|\sin\Theta_m|}\right) = \sum_m \operatorname{Min.}$$

folgendermaßen abgeschätzt. Für $1 \leqq m < M$ ist

$$\Theta_m - \Theta_{m+1} > c\,\frac{T h_1 h_2 \mu}{v_m^{\frac{7}{2}}} > c\,\frac{T h_1 h_2 \mu}{N^{\frac{7}{2}}} = \varDelta.$$

Wegen

$$\Theta_1 = \frac{c\,T h_1 h_2}{N^{\frac{5}{2}}}$$

ist die Anzahl der von Θ_m betroffenen Teilstrecken

$$g\,\frac{\pi}{2} < \Theta \leqq (g+1)\,\frac{\pi}{2},\ g \text{ ganz},$$

kleiner als

$$1 + c\,T h_1 h_2 N^{-\frac{5}{2}}.$$

Für jede solche Teilstrecke ist die betreffende Teilsumme von (33), wegen $M < \frac{N}{\mu} \leqq N$ und $\mu\varDelta < c\,\frac{T\mu^4}{N^{\frac{7}{2}}} < c$, kleiner als

$$\mu + c\sum_{l=1}^{N} \frac{1}{l\varDelta} < \frac{c}{\varDelta} + \frac{c\log N}{\varDelta} < \frac{c\log N}{\varDelta}.$$

Daher ist

$$\sum_m \operatorname{Min.} < c\,\frac{\log N}{\varDelta}\left(1 + T h_1 h_2 N^{-\frac{5}{2}}\right) < c\log N\left(T^{-1} h_1^{-1} h_2^{-1} \mu^{-1} N^{\frac{7}{2}} + \mu^{-1} N\right).$$

Wegen

$$\sum_{h_1,\,h_2=1}^{\mu} \frac{1}{h_1 h_2} \leqq \left(\sum_{h=1}^{N} \frac{1}{h}\right)^2 < c\log^2 N$$

ist also

$$\sum_{h_1,\, h_2=1}^{\mu} \sum_m \text{Min.} < c \log N (T^{-1} \log^2 N \cdot \mu^{-1} N^{\frac{7}{2}} + \mu N)$$

$$< c \log N (T^{-1} \log^2 N \cdot N^{-\frac{7}{8}} T^{\frac{1}{4}} N^{\frac{7}{2}} + N^{\frac{7}{8}} T^{-\frac{1}{4}} N)$$

$$= c \log N (T^{-\frac{3}{4}} N^{\frac{21}{8}} \log^2 N + N^{\frac{15}{8}} T^{-\frac{1}{4}}),$$

folglich nach (32)

$$\mu^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\sum_{h_1,\, h_2=1}^{\mu} \sum_m \text{Min.}}$$

$$\text{(34)} \quad < c N^{\frac{5}{16}} T^{\frac{1}{8}} \log^{\frac{1}{4}} N (T^{-\frac{3}{16}} N^{\frac{21}{32}} \log^{\frac{1}{2}} N + N^{\frac{15}{32}} T^{-\frac{1}{16}}) = c Z.$$

Aus (29), (30), (31), (34) folgt die Behauptung.

Hauptsatz 2: *Für* $x > 4$, $q \geqq 1$ *ist*

$$\left| \sum_{n=1}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c x^{\frac{5}{92}} \log^{\frac{12}{23}} x;$$

also ist

$$\text{(10)} \qquad R(x, 1) = O(x^{\frac{7}{23}} \log^{\frac{12}{23}} x).$$

Beweis: Ich setze $\eta = \eta(x) = \left[\text{Max.} \left(x^{\frac{9}{23}} \log^{-\frac{24}{23}} x,\ x^{\frac{1}{3}}\right)\right]$ für $x > 4$.

1) Falls $q \leqq \eta$, schließe ich für $3 \leqq N \leqq N' \leqq q$, $N' < 2N$ aus Hilfssatz 5 (mit $T = \sqrt{x}$) und dem Abelschen Lemma

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c \log^{\frac{1}{4}} x (N^{\frac{1}{32}} x^{\frac{1}{32}} + N^{\frac{7}{32}} x^{-\frac{1}{32}} \log^{\frac{1}{2}} x).$$

Daher ist

$$\left| \sum_{n=1}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c + c \log^{\frac{1}{4}} x (\eta^{\frac{1}{32}} x^{\frac{1}{32}} + \eta^{\frac{7}{32}} x^{-\frac{1}{32}} \log^{\frac{1}{2}} x)$$

$$< c \log^{\frac{1}{4}} x (x^{\frac{1}{23}} + x^{\frac{5}{92}} \log^{\frac{25}{92}} x) < c x^{\frac{5}{92}} \log^{\frac{12}{23}} x.$$

2) Falls $q > \eta$, schließe ich aus 1)

$$\left| \sum_{n=1}^{\eta} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c x^{\frac{5}{92}} \log^{\frac{12}{23}} x$$

und aus Hilfssatz 2

$$\left| \sum_{n=\eta+1}^{q} \frac{e^{i\sqrt{nx}}}{n^{\frac{3}{4}}} \right| < c \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{\eta}} + c < c \frac{\sqrt[4]{x}}{x^{\frac{9}{46}} \log^{-\frac{12}{23}} x} = c x^{\frac{5}{92}} \log^{\frac{12}{23}} x.$$

Schluß.

Ich erhebe bei dieser Gelegenheit Einspruch gegen eine Stelle in einer anderen Arbeit von Herrn Wilson, *An application of Pfeiffer's method to a problem of Hardy and Littlewood*[21]).

Herr Wilson bemerkt dort[22]), aus Sätzen von mir und Herrn van der Corput folge:

Es sei $f(x)$ für $0 \leqq x \leqq X$ stetig und monoton fallend; es sei $f(X) = 0$. Es sei A die Anzahl der Gitterpunkte auf $0 < x \leqq X$, $0 < y \leqq f(x)$, wobei die auf der Kurve $y = f(x)$ mit $\frac{1}{2}$ bewertet sind,

$$\varphi_m(x) = 1 + 2 \sum_{\mu=1}^{m} \cos 2\mu\pi x.$$

Dann ist, wenn $\varDelta$ der durch $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = f(x)$ begrenzte Bereich ist[23]),

$$A = \lim_{m=\infty} \iint_{\varDelta} \varphi_m(x)\, \varphi_m(y)\, dx\, dy. \tag{35}$$

An keiner der drei Stellen, die er zitiert, steht etwas, das zu der falschen Aussage (35) berechtigt. An der ersten und dritten Stelle ist überhaupt der Fall ausgeschlossen, daß Gitterpunkte auf dem Rande liegen. An der zweiten Stelle habe ich jene Gleichung (35) unter der Einschränkung bewiesen, daß der Kurvenbogen überall eine Tangente besitzt (und das ist bei Herrn Wilsons Anwendung nachher auch erfüllt). Aus dem (von ihm nicht zitierten) nächsten Paragraphen meiner Abhandlung[24]) geht hervor, daß (35) ohne eine solche Einschränkung falsch ist; z. B. ist, wenn $X = \frac{3}{2}$ ist und für $x = 1$ die linke und die rechte Ableitung von $f(x)$ vorhanden, aber verschieden sind, jener Punkt $(1, f(1))$, falls $f(1)$ ganz ist, mit einem von $\frac{1}{2}$ verschiedenen Gewichte zu belegen. Das einfachste Gegenbeispiel gegen (35) wird durch $X = \frac{3}{2}$,

$$f_1(x) = -\frac{x}{2} + 1 \text{ für } 0 \leqq x \leqq 1, \quad f_1(x) = -x + \frac{3}{2} \text{ für } 1 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$$

---

21) Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. II, Bd. XXII (1924), S. 248—253.

22) S. 249—250.

23) Verf. setzt offenbar stillschweigend $X > \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) \geqq \frac{1}{2}$ voraus.

24) Dort ist übrigens der Faktor $\frac{1}{\pi^2}$ auf S. 486, Z. 6 bei h_λ und auf S. 470, Z. 5, 6 und 7 hinzuzufügen.

zusammen mit

$$f_2(x) = -x + \frac{3}{2} \text{ für } 0 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$$

geliefert. Wenn G den Unterschied beider Integrationsbereiche, also $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$, $-\frac{x}{2} + 1 \leqq y \leqq -x + \frac{3}{2}$ bedeutet, so wäre nach Herrn Wilson

$$\lim_{m=\infty} \iint_G \varphi_m(x)\, \varphi_m(y)\, dx\, dy = 0,$$

also meine Zahlen $h_{\frac{1}{2}}$ und h_1 einander gleich, während ich a. a. O. für $0 < \lambda \leqq 1$

$$h_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

bewiesen hatte.

Über die Gitterpunkte in einem Kreise.

Von

Edmund Landau.

(Fünfte Mitteilung.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 4. Juli 1924.

Satz: *Es gibt ein* $K_1 > 0$ *und ein* $K_2 > 0$, *so daß jede der Ungleichungen*

$$\pm Q(x) > K_1 x^{\frac{1}{4}}$$

$\left(\textit{wo } Q(x) = \sum_{0 \leqq n \leqq x} U(n) - \pi x,\ U(n) = \sum_{a^2+b^2=n} 1\right)$ *in jedem Intervall* $\tau < x < \tau + K_2\sqrt{\tau}$, $\tau > 1$, *eine Lösung hat.*

Beweis: Wird

$$Q_2(x) = \int_0^x dy \int_0^y Q(z)\,dz, \quad Q_3(x) = \int_0^x Q_2(y)\,dy$$

gesetzt, so ist bekanntlich für $x \geqq 1$

(1) $$|Q_3(x)| < K_3 x^{\frac{7}{4}}$$

und

$$Q_2(x) = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)\cos\left(2\pi\sqrt{nx} + \frac{\pi}{4}\right)}{n^{\frac{7}{4}}} + o\left(x^{\frac{5}{4}}\right).$$

Für $x > 0$ ist

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{U(n)\cos\left(2\pi\sqrt{nx} + \frac{\pi}{4}\right)}{n^{\frac{7}{4}}}\right| \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{U(n)}{n^{\frac{7}{4}}} < 4 = U(1).$$

Für $\xi = \xi_g = (g + \frac{5}{8} \pm \frac{1}{4})^2$, g ganz und $> K_4$, ist daher

(2) $$\pm Q_2(\xi) > K_5 \xi^{\frac{5}{4}}, \quad K_5 > 0.$$

Wegen $\xi_g = g^2 + O(g)$ genügt es zu zeigen, daß die Annahme

(3) $$\pm Q(x) \leqq \frac{K_5^3}{36 K_3^2} x^{\frac{1}{4}} \text{ für } 1 \leqq \xi - h = \xi - 12 \frac{K_3}{K_5}\sqrt{\xi} \leqq x \leqq \xi$$

mit (2) in Widerspruch steht. In der Tat wäre nach (3), (1)

$$-\frac{2}{3}K_5\xi^{\frac{5}{4}} \pm Q_2(\xi)$$

$$= \frac{1}{h}(-8K_3\xi^{\frac{7}{4}} \pm hQ_2(\xi)) < \pm\frac{1}{h}\left(-Q_3(\xi-h)+4Q_3\left(\xi-\frac{h}{2}\right)-3Q_3(\xi)+hQ_2(\xi)\right)$$

$$= \pm\frac{1}{h}\int_{\xi-h}^{\xi}dx\int_{\xi-\frac{\xi-x}{2}}^{\xi}dy\int_{y-\frac{\xi-x}{2}}^{y}Q(z)\,dz \leqq \frac{1}{h}\frac{K_5^3}{36K_3^2}\xi^{\frac{1}{4}}\int_{\xi-h}^{\xi}dx\int_{\xi-\frac{\xi-x}{2}}^{\xi}dy\int_{y-\frac{\xi-x}{2}}^{y}dz$$

$$= \frac{1}{h}\frac{K_5^3}{36K_3^2}\xi^{\frac{1}{4}}\frac{h^3}{12} = \frac{1}{3}K_5\xi^{\frac{5}{4}}.$$

Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen.

Von

Edmund Landau.

(Vierte Abhandlung.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 4. Juli 1924.

Einleitung.

Schon in meiner dritten Abhandlung[1]) betonte ich, daß die Herleitung der Relation (47) meiner zweiten Abhandlung[2]) sich nur auf die sieben ersten Voraussetzungen des Hauptsatzes stützt. Von diesen wird aber auch die sechste, d. h. $\eta > \frac{1}{2}$, nicht gebraucht, wenn nur $\varrho = 2$ (statt des dortigen $\varrho = [\eta] + 2$) im Falle $\eta \leqq \frac{1}{2}$ gewählt wird. Von ϱ wurde nämlich nur benutzt, daß es ganz, $> \eta + \frac{1}{2}$ und $\geqq 1$ ist. Im Falle $\eta < \frac{1}{2}$ kann somit bereits $\varrho = 1$ gewählt werden.

(47) gilt also, was auch η sei, für jedes positive ganze $\varrho > \eta + \frac{1}{2}$. Mit jedem solchen ϱ ist auch die nur auf (47) gestützte Beweisführung der dritten Abhandlung gültig. Der Hauptsatz der dritten Abhandlung, d. i. das Nichtbestehen der Relation (1) daselbst im Falle $Z(s) \not\equiv 0$, gilt also stets, wenn die Voraussetzungen I), II), III), IV), V), VII) des Hauptsatzes der zweiten Abhandlung erfüllt sind.

Diese Bemerkung ist wichtig, weil sich leicht feststellen läßt, daß mit den c_n, l_n auch die Zahlen

$$c_n^* = e_n \lambda_n^\beta, \quad l_n^* = \lambda_n$$

jene Voraussetzungen erfüllen. Mit anderen Worten: weil jene Voraussetzungen, wenn sie für

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^s}$$

---

1) Diese Nachrichten, Jahrgang 1917, S. 96—101.

2) Diese Nachrichten, Jahrgang 1915, S. 209—243.

gelten, auch für

$$Z^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^*}{l_n^{*s}}$$

erfüllt sind. In der Tat hat man nur zu setzen:

$$\begin{aligned}
\beta^* &= \beta, \\
\mu^* &= \nu, \\
\alpha_j^* &= \gamma_j - \beta\delta_j,\ \beta_j^* = \delta_j \qquad \text{für } j = 1, \ldots, \mu^*, \\
\nu^* &= \mu, \\
\gamma_j^* &= \alpha_j + \beta\beta_j,\ \delta_j^* = \beta_j \qquad \text{für } j = 1, \ldots, \nu^*, \\
e_n^* &= c_n l_n^{-\beta},\ \lambda_n^* = l_n
\end{aligned}$$

und verifiziert dann jene 6 Voraussetzungen in folgender Reihenfolge.

I) $$Z^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^*}{l_n^{*s}} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{\beta - s}$$

konvergiert für $\sigma > \beta^* = \beta$ absolut.

III) $$\sum_{n=1}^{\infty} e_n^* \lambda_n^{*s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{\beta - s}}$$

konvergiert für $\sigma < 0$ absolut.

IV) Für $\sigma > \beta$ ist nach (5) der zweiten Abhandlung

$$\prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_j + \beta\beta_j - \beta_j s) \cdot Z(\beta - s) = \prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(\gamma_j - \beta\delta_j + \delta_j s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{\beta} \lambda_n^{-s},$$

d. h.

(1) $$\prod_{j=1}^{\mu^*} \Gamma(\alpha_j^* + \beta_j^* s) \cdot Z^*(s) = \prod_{j=1}^{\nu^*} \Gamma(\gamma_j^* - \delta_j^* s) \cdot Z(\beta - s),$$

für $\sigma < 0$ also

$$\prod_{j=1}^{\mu^*} \Gamma(\alpha_j^* + \beta_j^* s) \cdot Z^*(s) = \prod_{j=1}^{\nu^*} \Gamma(\gamma_j^* - \delta_j^* s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e_n^* \lambda_n^{*s}.$$

II) ist jetzt klar nach (1) und der alten Voraussetzung II).

V) $$\sum_{j=1}^{\mu^*} \beta_j^* = \sum_{j=1}^{\nu} \delta_j = \frac{H}{2} = \sum_{j=1}^{\mu} \beta_j = \sum_{j=1}^{\nu^*} \delta_j^*,$$

also

$$\sum_{j=1}^{\mu^*} \beta_j^* = \sum_{j=1}^{\nu^*} \delta_j^* = \frac{H^*}{2}$$

mit

$$H^* = H.$$

VII) ist nach (1) und der alten Voraussetzung VII) klar.

Umgekehrt führt natürlich dies Verfahren von $Z^*(s)$ wieder rückwärts zu $Z(s)$, da

$$(e_n \lambda_n^{\beta})^* = c_n l_n^{-\beta} l_n^{\beta} = c_n, \quad \lambda_n^* = l_n.$$

VI) wurde nicht gefordert; ich brauche aber in der Folge den Wert

$$\eta^* = \sum_{j=1}^{\nu^*} (\gamma_j^* - \tfrac{1}{2}) - \sum_{j=1}^{\mu^*} (\alpha_j^* - \tfrac{1}{2})$$

$$= \sum_{j=1}^{\mu} (\alpha_j - \tfrac{1}{2}) + \beta \sum_{j=1}^{\mu} \beta_j - \sum_{j=1}^{\nu} (\gamma_j - \tfrac{1}{2}) + \beta \sum_{j=1}^{\nu} \delta_j = -\eta + H\beta.$$

Wegen

$$-\frac{\eta^* + \frac{1}{2}}{H^*} + \beta^* = -\frac{-\eta + H\beta + \frac{1}{2}}{H} + \beta = \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}$$

besagt also der Hauptsatz der dritten Abhandlung, auf $Z^*(s)$ angewendet: Es sei $Z(s) \not\equiv 0$. Dann ist für keine endliche Summe

$$V(x) = \sum_{S,\, Q} b_{S,\, Q}\, x^S \log^Q x \qquad (Q \geqq 0 \text{ ganz}, \ \Re S \leqq \beta) \tag{2}$$

und kein $\varepsilon > 0$

$$B(x) - V(x) = O\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H} - \varepsilon}\right).$$

Übrigens kann der Fall $\eta < \frac{1}{2}$ nur dann auftreten, wenn $Z(s) \equiv 0$ ist. Denn im Falle $\eta < \frac{1}{2}$ ist die rechte Seite von (47), $\varrho = 1$ genommen, für $x > 0$ differentiierbar; in der Tat konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{-1} \frac{d}{dx} L(\lambda_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n L'(\lambda_n x)$$

nach Formel (34) der zweiten Abhandlung gleichmäßig auf jeder positiven x-Strecke; also ist

$$\Phi(x) = \int_0^x B(y)\, dy$$

für $x > 0$ differentiierbar, so daß alle c_n verschwinden müssen.

(Dies besagt, auf $Z^*(s)$ angewendet: Ist $Z^*(s) \not\equiv 0$, d. h. $Z(s) \not\equiv 0$, so ist

$$\eta^* = -\eta + H\beta \geqq \tfrac{1}{2};$$

also kann die in der Fußnote zu S. 226 erwähnte Möglichkeit $H < \frac{2\eta+1}{2\beta}$ nur im Falle $Z(s) \equiv 0$ auftreten.)

Der Fall $\eta = \frac{1}{2}$ kommt auch ohne $Z(s) \equiv 0$ vor, z. B. für $Z(s) = \zeta(s)$.

Das Obige liefert speziell, wenn

$$P(x) = \sum \text{Res.} \frac{x^s}{s} Z(s)$$

über alle etwaigen Pole von $\frac{Z(s)}{s}$ bedeutet (es gibt deren jedenfalls nicht unendlich viele): Unter den Voraussetzungen I) bis V) nebst VII) ist, falls $Z(s) \not\equiv 0$ ist und

$$B(x) - P(x) = D(x)$$

gesetzt wird, für kein $\varepsilon > 0$

$$D(x) = O\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H} - \varepsilon}\right). \tag{3}$$

Das Ziel dieser vierten Abhandlung ist, (3) zu verschärfen. Bei der Formulierung des neuen Hauptsatzes sei zunächst der triviale Fall $Z(s) \equiv 0$ ausgeschlossen; alsdann werde ohne Beschränkung der Allgemeinheit $e_1 \neq 0$ angenommen und dann sogar $e_1 > 0$ $\left(\text{da sonst nur } \frac{Z(s)}{e_1} \text{ statt } Z(s) \text{ zu betrachten wäre}\right)$. Dann lautet der neue

Hauptsatz: *Es ist*

$$\Re D(x) = \Omega_R\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right) \tag{4}$$

$\left(\text{d. h. nicht} < o\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right)\right)$ *und*

$$\Re D(x) = \Omega_L\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right) \tag{5}$$

$\left(\text{d. h. nicht} > o\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right)\right)$.

Und noch schärfer: *Nicht nur gibt es* (was (4), (5) aussagen) *je eine Folge monoton ins Unendliche wachsender* $x_n (n = 1, 2, \ldots)$ *mit*

$$\pm \Re D(x) > p x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}$$

(jedes p dieser Abhandlung bezeichnet eine positive, nur von der Z-Funktion abhängige Zahl; Abhängigkeit von weiteren Para-

metern wird durch Indizes ausgedrückt); *sondern diese zwei Folgen lassen sich sogar so wählen, daß*

$$(6) \qquad x_{n+1} < x_n + p x_n^{1-\frac{1}{H}}$$

ist.

In der letzteren Fassung ist der Hauptsatz auch in den beiden Spezialfällen des Teilerproblems und Kreisproblems ($Z(s) = \zeta^2(s)$ bezw. $\zeta_{P(i)}(s)$) neu, während (4) und (5) in diesen beiden Spezialfällen seit 1915 durch Herrn Hardy und im Falle $Z(s) = \zeta_\varkappa(s)$ für jeden algebraischen Zahlkörper $\varkappa$ seit 1922 durch Herrn Walfisz bekannt ist. Der Wortlaut mit der Nebenbedingung (6) ist in jedem Falle neu, von ganz trivialen Fällen wie $Z(s) = \zeta(s)$ abgesehen.

Wenn $P(x)$ durch ein beliebiges $V(x)$ der Gestalt (2) ersetzt wird, kann natürlich keiner der beiden Sätze

$$\Re\,(B(x) - V(x)) = \Omega_R\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right) \text{ oder } \Omega_L\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right)$$

bestehen; man denke nur an $Z(s) = \zeta(s)$, $V(x) = 2x$ oder 0. Aber eine entsprechende Ω-Relation

$$B(x) - V(x) = \Omega\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right)$$

$\left(\text{d. h. nicht} = o\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right)\right)$ ist aus der in (4) oder (5) enthaltenen Tatsache

$$(7) \qquad B(x) - P(x) = \Omega\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right)$$

leicht abzuleiten. In der Tat sei

$$(8) \qquad B(x) - V(x) = o\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right).$$

Für $\sigma > \beta$ ist

$$\frac{Z(s)}{s} = \int_{l_1}^{\infty} \frac{B(u)}{u^{s+1}}\,du;$$

also wäre für $\sigma > p_\nu$

$$(9) \quad \frac{Z(s)}{s} - \int_1^{\infty} \frac{V(u)}{u^{s+1}}\,du = \int_{l_1}^{\infty} \frac{B(u) - V(u)}{u^{s+1}}\,du - \int_1^{l_1} \frac{V(u)}{u^{s+1}}\,du.$$

Die rechte Seite von (9) wäre wegen (8) für $\sigma > \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}$ regulär. Sie hätte auch auf $\sigma = \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}$ keinen Pol, da für $s = \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H} + \delta + t_0 i$, $\delta > 0$, $\delta \to 0$

$$\int_{l_1}^{\infty} \frac{B(u) - V(u)}{u^{s+1}} du = \int_{l_1}^{\infty} \frac{o\left(u^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right)}{u^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H} + 1 + \delta}} du = o\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

wäre. Für $\sigma > p_\nu$ ist nun

$$\int_1^{\infty} \frac{V(u)}{u^{s+1}} du = \sum_S \int_1^{\infty} \frac{u^S \sum_Q b_{S,Q} \log^Q u}{u^{s+1}} du = \sum_S \sum_{Q=0}^{q} b_{S,Q} \frac{Q!}{(s-S)^{Q+1}}.$$

Also wäre

$$\frac{Z(s)}{s} - \sum_S \sum_{Q=0}^{q} b_{S,Q} \frac{Q!}{(s-S)^{Q+1}}$$

für $\sigma \geqq \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}$ regulär, folglich

$$P(x) = \sum_{\sigma \geqq \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}} \text{Res.} \frac{x^s Z(s)}{s} + o\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right)$$

$$= \sum_{\substack{S \\ \Re S \geqq \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}} \sum_{Q=0}^{q} b_{S,Q} x^S \log^Q x + o\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right) = V(x) + o\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right),$$

so daß sich (8) und (7) widersprechen.

Weil meine gegenwärtige Abhandlung reichlich kompliziert ist, habe ich den vollständigen Beweis des neuen Hauptsatzes für den Spezialfall des Kreisproblems in einer besonderen Abhandlung vorausgeschickt; diese zwei Seiten bitte ich zunächst zu lesen. Dort fallen meine Hilfssätze 3 und 4 weg, da die asymptotische Entwicklung der Besselschen Funktionen zur Verfügung steht. Übrigens läßt sich aus ihr rückwärts leicht der Hilfssatz 3 ablesen; doch beweise ich diesen mit Absicht direkt und damit implizit alles beim Kreisproblem über Besselsche Funktionen Gebrauchte.

§ 1.

Hilfssätze.

Den ersten zwei Hilfssätzen sind die Voraussetzungen gemeinsam:

Es sei ϱ ganz und $\geqq 2$. Es sei $f(x)$ für $x > 0$ reell und $\varrho - 1$ mal differentiierbar. Es sei

$$f^{(\varrho-1)}(x) - f^{(\varrho-1)}(1) = \int_1^x F(y)\,dy,$$

wo $F(y)$ reell und eigentlich integrabel ist.

Hilfssatz 1: *Es sei* $A > 0$, $B > 0$, $h = \sqrt[\varrho]{\frac{B}{A}}$, $\xi - (\varrho-1)h > 0$. *Auf der Strecke* $\xi - (\varrho - 1)h \leqq x \leqq \xi$ *sei*

(10) $$F(x) \leqq A$$

und

(11) $$|f(x)| \leqq B.$$

Dann ist

$$f'(\xi) < K_\varrho \sqrt[\varrho]{AB^{\varrho-1}},$$

wo $K_\varrho > 0$ *ist und nur von* ϱ (also nicht von f, F, A, B, ξ) *abhängt.*

(Auch jedes künftige K_ϱ wird > 0 sein und nur von ϱ abhängen; Abhängigkeit von weiteren Parametern wird durch weitere Indizes ausgedrückt.)

Beweis: Für $0 \leqq y \leqq h$ ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} (-1)^\lambda \binom{\varrho-1}{\lambda} f'(\xi - \lambda y) = \int_{\xi-y}^{\xi} dt_1 \int_{t_1-y}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_{\varrho-2}-y}^{t_{\varrho-2}} F(t)\,dt,$$

also nach (10)

$$\leqq A y^{\varrho-1} \leqq A h^{\varrho-1}.$$

Durch Integration nach y von 0 bis h ergibt sich

$$hf'(\xi) - \sum_{\lambda=1}^{\varrho-1} (-1)^\lambda \binom{\varrho-1}{\lambda} \frac{1}{\lambda} (f(\xi - \lambda h) - f(\xi)) \leqq A h^\varrho,$$

also wegen (11)

$$hf'(\xi) < Ah^\varrho + K_\varrho B = K_\varrho B,$$

$$f'(\xi) < \frac{K_\varrho B}{h} = K_\varrho \sqrt[\varrho]{AB^{\varrho-1}}.$$

Hilfssatz 2: *Es sei* $C > 0$, $D > 0$, $\alpha \geqq 0$, $\lambda < 1$. *Dann gibt es ein* $\delta = K_{\varrho, C, D}$ *mit folgender Eigenschaft.*

Auf der Strecke

(12) $$\xi-(\varrho-1)\sqrt[\varrho]{\frac{2}{\delta}}\,\xi^{\lambda}\leqq x\leqq\xi,$$

wo

$$\xi>0,\ \xi-(\varrho-1)\sqrt[\varrho]{\frac{2}{\delta}}\,\xi^{\lambda}>0,$$

sei

$$|f(x)|<Cx^{\alpha+\varrho\lambda};$$

ferner sei

$$f'(\xi)>D\xi^{\alpha+(\varrho-1)\lambda}.$$

Dann gibt es für $\xi>K_{\varrho,C,D,\alpha,\lambda}$ *auf der Strecke* (12) *ein* x *mit*

(13) $$F(x)>\delta x^{\alpha}.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $C=1$. (Sonst betrachte man $f^*(x)=\frac{f(x)}{C}$, $F^*(x)=\frac{F(x)}{C}$.)

$\delta>0$ sei zunächst beliebig. Gesetzt, es sei auf (12) durchweg

$$F(x)\leqq\delta x^{\alpha}.$$

Für $\xi>K_{\delta,\varrho,\alpha,\lambda}$ ist (wegen $\lambda<1$)

$$\left(\xi-(\varrho-1)\sqrt[\varrho]{\frac{2}{\delta}}\,\xi^{\lambda}\right)^{\alpha+\varrho\lambda}<2\xi^{\alpha+\varrho\lambda},$$

also nach Hilfssatz 1 $\left(\text{mit } A=\delta\xi^{\alpha},\ B=2\xi^{\alpha+\varrho\lambda},\ h=\sqrt[\varrho]{\frac{2}{\delta}}\,\xi^{\lambda}\right)$

$$D\xi^{\alpha+(\varrho-1)\lambda}<f'(\xi)<K_{\varrho}\sqrt[\varrho]{\delta\xi^{\alpha}\,2^{\varrho-1}\,\xi^{\alpha(\varrho-1)+\varrho(\varrho-1)\lambda}}=K_{\varrho}\sqrt[\varrho]{\delta}\,\xi^{\alpha+(\varrho-1)\lambda},$$

$$\delta>\left(\frac{D}{K_{\varrho}}\right)^{\varrho}=K_{\varrho,D}.$$

Für $\delta=K_{\varrho,D}$ hat also (13) eine Lösung auf (12), wofern $\xi>K_{\varrho,D,\alpha,\lambda}$.

Hilfssatz 3: *Bei* $y\to\infty$ *ist*

$$\int_1^{\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-ui(\log u-1-\log y)}\,du=\sqrt{2\pi}\,e^{\left(y-\frac{\pi}{4}\right)i}+o(1).$$

Beweis: Das Integral konvergiert für $y>0$ nach dem zweiten Mittelwertsatz wegen

(14) $$\int u^{-\frac{1}{2}}e^{-ui(\log u-1-\log y)}\,du=i\int\frac{d\left(e^{-ui(\log u-1-\log y)}\right)}{\sqrt{u}\,(\log u-\log y)}.$$

Ich zerlege für $y > 1$

$$\int_1^\infty = \int_1^{y-y^{\frac{3}{5}}} + \int_{y-y^{\frac{3}{5}}}^{y+y^{\frac{3}{5}}} + \int_{y+y^{\frac{3}{5}}}^\infty = I_1 + I_2 + I_3.$$

Nach (14) und dem zweiten Mittelwertsatz ist $\left(\text{weil } \sqrt{u}(\log u - \log y)\right.$ für $0 < u < \frac{y}{e^2}$ fällt und für $u > \frac{y}{e^2}$ steigt$\left.\right)$

$$I_1 = O\left(\frac{1}{\log y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}\log\frac{y}{y-y^{\frac{3}{5}}}}\right) = O\left(\frac{1}{\log y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}\,y^{-\frac{2}{5}}}\right) = o(1),$$

$$I_3 = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}\log\frac{y+y^{\frac{3}{5}}}{y}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}\,y^{-\frac{2}{5}}}\right) = o(1).$$

Andererseits ist

$$I_2 = \int_{-y^{\frac{3}{5}}}^{y^{\frac{3}{5}}} (y+z)^{-\frac{1}{2}} e^{-i(y+z)(\log(y+z)-1-\log y)} dz$$

$$= \sqrt{y}\int_{-y^{-\frac{2}{5}}}^{y^{-\frac{2}{5}}} (1+w)^{-\frac{1}{2}} e^{-iy(1+w)(-1+\log(1+w))} dw.$$

Unterwegs ist gleichmäßig

$$(1+w)^{-\frac{1}{2}} = 1 + O(y^{-\frac{2}{5}}),$$

$$-y(1+w)(-1+\log(1+w)) = -y(1+w)\left(-1+w-\frac{w^2}{2}\right) + O(y^{-\frac{1}{5}})$$

$$= y - \frac{yw^2}{2} + O(y^{-\frac{1}{5}}),$$

also der Integrand

$$\left(1+O(y^{-\frac{2}{5}})\right) e^{yi-\frac{y}{2}w^2 i}\left(1+O(y^{-\frac{1}{5}})\right) = e^{yi-\frac{y}{2}w^2 i} + O(y^{-\frac{1}{5}}),$$

$$I_2 = \sqrt{y}\,e^{yi}\int_{-y^{-\frac{2}{5}}}^{y^{-\frac{2}{5}}} e^{-\frac{y}{2}w^2 i} dw + O(\sqrt{y}\,y^{-\frac{2}{5}}y^{-\frac{1}{5}})$$

$$= e^{yi}\sqrt{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}y^{\frac{1}{10}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}y^{\frac{1}{10}}} e^{-v^2 i} dv + o(1) = e^{yi}\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 i} dv + o(1)$$

$$= \sqrt{2\pi}\,e^{\left(y-\frac{\pi}{4}\right)i} + o(1).$$

Hilfssatz 4: *Wird für ganzes* $\varrho > \eta + \frac{1}{2}$

$$\Psi_\varrho(w) = \int\limits_{\left(\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}\right)} G(s) \frac{w^{s+\varrho}}{s\cdots(s+\varrho)}\, ds \qquad (w > 0)$$

gesetzt, so ist

$$(15)\quad \Psi_\varrho(w) = p_\varrho i w^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho} \cos\left(p_\varrho w^{\frac{1}{H}} + p_\varrho\right) + o\left(w^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}\right).$$

(Da $\Psi_0(w)$ das $L(w)$ der zweiten Abhandlung ist, kam die in (15) enthaltene rohere Formel

$$(16)\qquad \Psi_\varrho(w) = O\left(w^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}\right)$$

bereits als Formel (32) daselbst vor.)

Beweis: Für $\sigma_0 = \frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}$ ist auf $\sigma = \sigma_0$ nach (19) der zweiten Abhandlung, wenn $a(\sigma) \neq 0$ beachtet wird,

$$(17)\qquad \frac{G(s)}{s\cdots(s+\varrho)} = p_\varrho e^{p_\varrho i} t^{-\frac{1}{2}} e^{-Hti\log t - Ati} + O(t^{-\frac{3}{2}}).$$

Aus Symmetriegründen ist

$$(18)\qquad \Psi_\varrho(w) = 2i\Im\int$$

über den Teil $t \geqq 0$ des Weges.

Falls σ_0 kein Pol ist, ist der Beitrag der Strecke $0 \leqq t \leqq \frac{1}{H}$ zum Integral

$$w^{\sigma_0+\varrho} i\int_0^{\frac{1}{H}} \frac{G(s)}{s\cdots(s+\varrho)} w^{ti}\, dt = o(w^{\sigma_0+\varrho}),$$

da $\int_0^{\frac{1}{H}}$ Fourierkonstante einer stetigen Funktion ist.

Falls σ_0 ein Pol ist, kann die Ausbuchtung durch eine gebrochene Linie

$$(\sigma_0-\delta)\cdots\left(\sigma_0-\delta+\frac{i}{H}\right)\cdots\left(\sigma_0+\frac{i}{H}\right)$$

bei jedem positiven $\delta < p_\varrho$ ersetzt werden. Hierin ist

$$\left|\int_{\sigma_0-\delta+\frac{i}{H}}^{\sigma_0+\frac{i}{H}} \frac{G(s)}{s\cdots(s+\varrho)} w^{s+\varrho}\, ds\right| < p_\varrho \delta w^{\sigma_0+\varrho} \qquad \text{für } w > 1,$$

und

$$\left|\int_{\sigma_0-\delta}^{\sigma_0-\delta+p_\varrho i}\right| < p_{\varrho,\delta} w^{\sigma_0+\varrho-\delta} < \delta w^{\sigma_0+\varrho} \qquad \text{für } w > p_{\varrho,\delta}.$$

Jedenfalls ist also

$$\Psi_\varrho(w) = 2i\Im\int_{\frac{1}{H}}^{\infty}\frac{G(s)}{s\cdots(s+\varrho)}w^s\,ds + o(w^{\sigma_0+\varrho}).$$

Das O-Glied in (17) liefert zu $\int_{\frac{1}{H}}^{\infty}$ den Beitrag

$$w^{\sigma_0+\varrho}\int_{\frac{1}{H}}^{\infty} w^{ti}\,O(t^{-\frac{3}{2}})\,dt = o(w^{\sigma_0+\varrho}),$$

da dies $\int_{\frac{1}{H}}^{\infty}$ Fourierkonstante einer stetigen, absolut ins Unendliche integrabeln Funktion ist.

Das Hauptglied in (17) liefert den Beitrag

$$w^{\sigma_0+\varrho}p_\varrho e^{p_\varrho i}\int_{\frac{1}{H}}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-Hti\log t - Ati}w^{ti}\,dt$$

$$= w^{\sigma_0+\varrho}p_\varrho e^{p_\varrho i}\int_1^{\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-ui\left(\log\frac{u}{H}+\frac{A}{H}\right)}w^{\frac{u}{H}i}\,du,$$

also,

$$y = He^{-\frac{A}{H}-1}w^{\frac{1}{H}}$$

gesetzt, nach Hilfssatz 3 den Beitrag

$$w^{\sigma_0+\varrho}p_\varrho e^{p_\varrho i}\int_1^{\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-ui(\log u - 1 - \log y)}\,du$$

$$= w^{\sigma_0+\varrho}p_\varrho e^{p_\varrho i}e^{yi} + o(w^{\sigma_0+\varrho}) = w^{\sigma_0+\varrho}p_\varrho e^{p_\varrho i}e^{p_\varrho w^{\frac{1}{H}} i} + o(w^{\sigma_0+\varrho}),$$

womit nach (18) die Behauptung (15) bewiesen ist, wegen

$$\Im\left(e^{p_\varrho i}e^{p_\varrho w^{\frac{1}{H}} i}\right) = \sin\left(p_\varrho w^{\frac{1}{H}} + p_\varrho\right) = \cos\left(p_\varrho w^{\frac{1}{H}} + p_\varrho\right).$$

Hilfssatz 5: *Es gibt ein* $\varrho = p$, *so daß,*

$$g(x) = \Re\left(\Phi(x) - \sum \text{Res.} \frac{x^{s+\varrho}}{s \cdots (s+\varrho)} Z(s)\right)$$

gesetzt, bei passenden p *einerseits*

$$|g(x)| < p x^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho} \quad \text{für } x \geqq 1$$

ist, andererseits jede der beiden Ungleichungen

$$\pm g'(\xi) > p \xi^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}+\varrho-1}$$

für je eine positive Folge ξ_n *mit* $\xi_n < \xi_{n+1} < \xi_n + p\xi_n^{1-\frac{1}{H}}$, $\xi_n \to \infty$ *erfüllt ist.*

Beweis: Nach (47) der zweiten Abhandlung ist für $\varrho > \eta + \frac{1}{2}$, $x > 0$

$$\Phi(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{\varrho-1}} B(y)\, dy$$

$$= \sum \text{Res.} \frac{x^{s+\varrho}}{s \cdots (s+\varrho)} Z(s) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{-\varrho} \Psi_\varrho(\lambda_n x) + o\left(x^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}\right),$$

$$\text{(19)} \qquad g(x) = \frac{1}{2\pi} \Im \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{-\varrho} \Psi_\varrho(\lambda_n x) + o\left(x^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}\right),$$

also, ϱ durch $\varrho - 1$ ersetzt, für $\varrho > \eta + \frac{3}{2}$

$$\text{(20)} \quad g'(x) = \frac{1}{2\pi} \Im \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{-\varrho+1} \Psi_{\varrho-1}(\lambda_n x) + o\left(x^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}+\varrho-1}\right).$$

Für $\varrho = p + \eta + \frac{3}{2} = p$ gilt endlich

$$\text{(21)} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} |e_n| \lambda_n^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}} < \tfrac{1}{2} e_1 \lambda_1^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}.$$

Für dies ϱ ist, wenn $x \geqq 1$, nach (19), (16)

$$|g(x)| < p x^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}$$

und wegen (15)

$$\frac{1}{2\pi}\Im\sum_{n=1}^{\infty} e_n\lambda_n^{-\varrho+1}\Psi_{\varrho-1}(\lambda_n x)$$

$$(22)\quad \begin{cases} = p\,x^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}+\varrho-1}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Re(e_n)\lambda_n^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}\cos\left(p(\lambda_n x)^{\frac{1}{H}}+p\right) \\ \qquad + o\left(x^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}+\varrho-1}\right), \end{cases}$$

wobei nach (21)

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\Re(e_n)\lambda_n^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}\cos\left(p(\lambda_n x)^{\frac{1}{H}}+p\right)-e_1\lambda_1^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}\cos\left(p(\lambda_1 x)^{\frac{1}{H}}+p\right)\right|$$
$$<\tfrac{1}{2}e_1\lambda_1^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}$$

ist. Werden die $\xi\geqq 1$ mit

$$(23)\qquad \cos\left(p(\lambda_1\xi)^{\frac{1}{H}}+p\right)=\pm 1$$

eingesetzt, so ist für sie

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}\Re(e_n)\lambda_n^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}\cos\left(p(\lambda_n\xi)^{\frac{1}{H}}+p\right)>p,$$

also nach (20) und (22), wofern $\xi>p$,

$$\pm g'(\xi)>p\,\xi^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}+\varrho-1}.$$

Die Auflösung von (23), d. h. von

$$p\,\xi^{\frac{1}{H}}+p=\begin{Bmatrix}2k\pi\\(2k+1)\pi\end{Bmatrix}\qquad (k \text{ ganz}),$$

liefert aber je eine positive Folge $\xi=\xi_n\,(n=1,2,\ldots)$ mit $\xi_1>p$, $\xi_n<\xi_{n+1}<\xi_n+p\,\xi_n^{1-\frac{1}{H}}$, $\xi_n\to\infty$.

§ 2.

Beweis des Hauptsatzes.

Auf die beiden durch Hilfssatz 5 gelieferten Folgen ξ_n ist Hilfssatz 2 anwendbar mit

$$\varrho = p,\ f(x) = \pm g(x),\ F(x) = \pm \Re\left(B(x) - \sum \text{Res.} \frac{x^s}{s} Z(s)\right) = \pm \Re D(x),$$

$$C = p,\quad D = p,\quad \alpha = \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H},\quad \lambda = 1 - \frac{1}{H}.$$

Er liefert für jedes $n > p$ auf $\xi_n - p\xi_n^\lambda \leqq x \leqq \xi_n$ ein x mit

$$\pm \Re D(x) > p x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}};$$

die verschiedenen dieser x, in wachsender Ordnung mit $x_1, x_2, \ldots$ bezeichnet, erfüllen offenbar die verlangten Relationen

$$x_n \to \infty,\quad x_{n+1} < x_n + p x_n^{1 - \frac{1}{H}}.$$

Beweis des Picard-Landauschen Satzes.

Von

Rolf Nevanlinna in Helsingfors.

Vorgelegt von E. Landau in der Sitzung vom 6. Juni 1924.

In meiner Arbeit *Untersuchungen über den Picardschen Satz* [1]) habe ich u. a. einen neuen Beweis des Picardschen Satzes gegeben. Herr Landau hat mich darauf aufmerksam gemacht, wie leicht auch die von ihm im Jahre 1904 entdeckte Erweiterung des genannten Satzes aus einer in meiner Arbeit hergeleiteten Ungleichung folgt. Ich werde versuchen, auf den folgenden Seiten eine möglichst einfache Beweisanordnung des Picard-Landauschen Satzes zu geben.

1. Es sei $\overset{+}{\log} a = 0$ für $0 \leqq a \leqq 1$, $\overset{+}{\log} a = \log a$ für $a > 1$; dann gilt offenbar

$$(1) \quad \overset{+}{\log}(ab) \leqq \overset{+}{\log} a + \overset{+}{\log} b, \quad \overset{+}{\log}(a+b) \leqq \overset{+}{\log} a + \overset{+}{\log} b + \log 2 \quad (a \geqq 0,\ b \geqq 0).$$

Ferner setze ich, wenn $r > 0$ und $f(x)$ für $|x| \leqq r$ meromorph ist,

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| f\left(r e^{i\varphi}\right) \right| d\varphi.$$

Ich brauche den nachstehenden

Hilfssatz: *Wenn* $f(x)$ *auf* $|x| \leqq r$ (wo $r > 0$) *regulär und* $f(0) \neq 0$ *ist, so ist*

$$(2) \qquad m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqq \log \left| \frac{1}{f(0)} \right| + m(r, f).$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der sog. Jensenschen Formel. In der Tat ist, falls ξ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ die etwaigen Nullstellen von $f(x)$ auf $|x| < r$ sind,

1) Acta Soc. Scient. Fennicae, T. 50, N:o 6, 1924.

$$m(r, f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi$$

$$= \log|f(0)| + \sum_{|\xi_\nu|<r} \log\frac{r}{|\xi_\nu|} \geqq \log|f(0)|.$$

2. Ich beweise nun den

Satz[2]: *Es sei* $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots$ *für* $|x| \leqq 1$ *regulär,* $\neq 0$ *und* $\neq 1$. *Es sei* $|a_0| < \Omega$, $\frac{1}{|a_0|} < \Omega$, $\frac{1}{|a_0 - 1|} < \Omega$, $a_1 \neq 0$. *Dann gilt für* $0 < r < \varrho \leqq 1$ *die Ungleichung*

$$m(r, f) < C_0 + \log\frac{1}{|a_1|} + 4\log\frac{1}{\varrho - r} + 2\,\overset{+}{\log}\, m(\varrho, f), \tag{3}$$

wo C_0 *nur von* Ω *abhängt.*

Beweis: Es ist

$$\left|\frac{1}{f}\right| \leqq 1 + \left|\frac{f'}{f}\cdot\frac{f-1}{f'}\right|,$$

also nach (1) für $0 < r < 1$

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f}\right| d\varphi \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\log 2 + \overset{+}{\log}\left|\frac{f'}{f}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{f-1}{f'}\right|\right) d\varphi$$

$$= \log 2 + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f-1}{f'}\right),$$

also wegen (2)

$$m(r, f) = \log|a_0| + m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqq \log|2a_0| + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f-1}{f'}\right)$$

$$\leqq \log\frac{2|a_0||a_0-1|}{|a_1|} + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right). \tag{4}$$

Durch Differentiation des Poissonschen Integrals erhält man für $|x| < \varrho \leqq 1$, $z = \varrho e^{i\vartheta}$

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \log|f(z)| \frac{2z}{(z-x)^2} d\vartheta\right| \leqq \frac{2\varrho}{(\varrho - |x|)^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|f(z)|| d\vartheta$$

$$= \frac{2\varrho}{(\varrho-|x|)^2}\left(m(\varrho, f) + m\left(\varrho, \frac{1}{f}\right)\right) = \frac{2\varrho}{(\varrho-|x|)^2}\left(\log\left|\frac{1}{a_0}\right| + 2m(\varrho, f)\right). \tag{5}$$

---

2) l. c., S. 9.

Durch Anwendung der Ungleichungen (1) finde ich demnach, daß

$$(6') \quad m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqq \log 8 + \overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a_0}\right| + 2\log\frac{1}{\varrho - r} + \overset{+}{\log}\, m(\varrho, f).$$

Aus Symmetriegründen ist auch

$$m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) \leqq \log 8 + \overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a_0 - 1}\right| + 2\log\frac{1}{\varrho - r} + \overset{+}{\log}\, m(\varrho, f-1)$$

$$(6'') \qquad \leqq \log 16 + \overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a_0 - 1}\right| + 2\log\frac{1}{\varrho - r} + \overset{+}{\log}\, m(\varrho, f).$$

Aus (4), (6′), (6″) ergibt sich

$$m(r, f) \leqq \log|256\, a_0(a_0 - 1)| + \overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a_0}\right| + \overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a_0 - 1}\right|$$
$$+ \log\frac{1}{|a_1|} + 4\log\frac{1}{\varrho - r} + 2\,\overset{+}{\log}\, m(\varrho, f),$$

also (3).

3. Aus der Ungleichung (3) folgt nunmehr leicht der

Satz von Picard-Landau: *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes existiert eine nur von Ω abhängige Zahl C_1, so daß*

$$|a_1| < C_1.$$

Es genügt offenbar, den Beweis für den Fall $|a_1| > 1$ zu führen [3]).

Bemerkt man, daß $\overset{+}{\log}\, t \leqq \frac{t}{e} \leqq \frac{3}{8} t$ für $t \geqq 0$ ist, so folgt aus (3) für $\frac{1}{2} \leqq r < \varrho \leqq 1$, daß

$$m(r, f) < C_0 + 4\log\frac{1}{\varrho - r} + \frac{3}{4} m(\varrho, f).$$

Setzt man dann

$$\psi(r) = m(r, f) - 4C_0 - 64\log 2 - 16\log\frac{1}{1-r},$$

$r_0 = \frac{1}{2}$, $r_\nu = \frac{1 + r_{\nu-1}}{2}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und wählt man $r = r_{\nu-1}$, $\varrho = r_\nu$, so wird für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\psi(r_{\nu-1}) < \frac{3}{4}\psi(r_\nu), \quad \psi(r_0) < \left(\frac{3}{4}\right)^{\nu}\psi(r_\nu).$$

Nun ist aber $\psi(r) \to -\infty$ für $r \to 1$, so daß die Zahl $\psi(r_\nu)$ von einem gewissen ν ab sicher negativ ist. Daher ist auch

$$\psi(r_0) = \psi\left(\frac{1}{2}\right) = m\left(\frac{1}{2}, f\right) - 4C_0 - 80\log 2 < 0.$$

---

3) Die nachstehende einfache Beweisanordnung hat mir Herr Landau gütigst mitgeteilt.

Mittels der Ungleichung (5) schließt man nun, indem man $x = 0$, $\varrho = \frac{1}{2}$ setzt, daß

$$|a_1| \leqq 4|a_0|\left(\log\left|\frac{1}{a_0}\right| + 2m\left(\frac{1}{2}, f\right)\right)$$
$$< 4|a_0|\left(\log\left|\frac{1}{a_0}\right| + 8C_0 + 160\log 2\right) < C_1.$$

Zur Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2}+it)$.

Von

Arnold Walfisz in Wiesbaden.

Vorgelegt in der Sitzung vom 2. Mai 1924.

In einer unpublizierten Abhandlung haben G. H. Hardy und J. E. Littlewood die Größenordnung der Riemannschen Zetafunktion im kritischen Streifen untersucht und dabei u. a. die Abschätzung

(1) $$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = O\left(t^{\frac{1}{6}+\varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ bewiesen. E. Landau[1]) verallgemeinerte sodann die Hardy-Littlewoodschen Ergebnisse auf die Dirichletschen L-Funktionen, vereinfachte die Methode und verschärfte u. a. (1) zu

(2) $$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = O\left(t^{\frac{1}{6}}\log^{\frac{3}{2}} t\right).$$

Ich möchte im folgenden darlegen, wie man, von bereits bekannten Resultaten ausgehend (deren Begründung allerdings komplizierter als der obige Nachweis von (2) ist), rasch zu

(3) $$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = O\left(t^{\frac{163}{988}}\right)$$

gelangen kann. $\left(\text{Übrigens ist } \frac{163}{988} < \frac{33}{200}\right)$. Es werden dabei die folgenden Hilfsmittel I-IV benutzt:

I[2]). *Wir werden sagen, daß die Zahlenpaare* (k_1, l_1), (k_2, l_2), ..., (k_m, l_m), *deren Anzahl und deren Werte konstant vorausgesetzt werden, ein Exponentensystem bilden, wenn*

$$0 \leqq k_p \leqq \tfrac{1}{2}, \qquad 0 \leqq l_p \leqq 1 \qquad (1 \leqq p \leqq m)$$

---

1) E. Landau „Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen" [Mathematische Zeitschrift, **20** (1924)], S. 105—125.

2) J. G. van der Corput „Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem" [Mathematische Annalen, **87** (1922), S. 39—65], S. 51—52, Definition; ein Druckfehler (S. 51, Z. 1 v. u.) ist nach den dem 89sten Annalenbande durch v. d. Corput beigegebenen „Berichtigungen" korrigiert.

ist, und es zu jeder positiven Zahl u zwei nur von u abhängige Zahlen r und c (r ganz $\geqq 3$, $0 < c < \frac{1}{2}$) gibt, derart, daß stets die Ungleichung

$$\left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leqq A \sum_{p=1}^{m} z^{k_p} a^{l_p}$$

mit einem nur von u und v abhängigen $A > 0$ gilt, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

$$v > 0, \quad 1 \leqq a < b < av, \quad y > 0, \quad z = ya^{-u} > 1;$$

$f(n)$ ist im Intervall $a \leqq n \leqq b$ definiert, reell, r-mal differentiierbar (in den Endpunkten eventuell nur einseitig), und für $a \leqq n \leqq b$, $0 \leqq p \leqq r-1$ ist

$$\left| f^{(p+1)}(n) - (-1)^p y \frac{\Gamma(u+p)}{\Gamma(u)} n^{-u-p} \right| < cy \frac{\Gamma(u+p)}{\Gamma(u)} n^{-u-p}.$$

II[3]). *Die Zahlenpaare* $\left(\frac{43}{104}, \frac{54}{104}\right)$, $\left(\frac{147}{344}, \frac{177}{344}\right)$, $\left(\frac{71}{176}, \frac{92}{176}\right)$ *und* $\left(\frac{17}{38}, \frac{19}{38}\right)$ *bilden ein Exponentensystem.*

III[4]). *Bilden (k_1, l_1), (k_2, l_2), (k_3, l_3), (k_4, l_4) ein Exponentensystem, dann trifft dasselbe für*

$$\leqq 4) \qquad \left(\frac{k_p}{2(k_p+1)}, \frac{1}{2} + \frac{l_p}{2(k_p+1)}\right); \ \left(0, \frac{4}{5}\right)$$

zu.

IV[5]). *Für $t \geqq 2$ und $t_1 = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$ ist*

$$\zeta(\tfrac{1}{2} + it) = \sum_{1 \leqq n < t_1} n^{-\frac{1}{2} - it}$$
$$+ \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{-it} e^{\frac{1}{4}\pi i} \sum_{1 \leqq n < t_1} n^{-\frac{1}{2} + it} + O\left(t^{-\frac{1}{4}} \log t\right).$$

3) v. d. Corput l. c., S. 64, Hilfssatz 14.

4) v. d. Corput l. c., S. 60, Hilfssatz 10 mit $q \neq 1$, $Q = 2$, $\mu = 4$.

5) G. H. Hardy and J. E. Littlewood „The zeros of Riemann's Zeta-Function on the critical line" [Mathematische Zeitschrift, **10** (1921) S. 283—317], Lemma 15, S. 301; in der Abhandlung „The approximate functional equation in the theory of the Zeta-Function, with applications to the divisor-problems of Dirichlet and Piltz" [Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, **21** (1921), S. 39—74], Theorem *C*, S. 58 geben die beiden Verfasser das schärfere Restglied $O\left(t^{-\frac{1}{4}}\right)$.

Beweis von (3). Ich bezeichne mit K kurz geeignete positive absolute Konstanten und nehme $t \geqq K \geqq 2$ derart, daß $2 < t_1 \leqq \frac{t}{\pi} - 2$.

Nach II und III bilden

$$\left(\frac{43}{294}, \frac{201}{294}\right), \quad \left(\frac{147}{982}, \frac{668}{982}\right), \quad \left(\frac{71}{494}, \frac{339}{494}\right), \quad \left(\frac{17}{110}, \frac{74}{110}\right), \quad \left(0, \frac{4}{5}\right)$$

ein Exponentensystem. Es werde

$$f(n) = \frac{t}{2\pi} \log n, \quad u = 1, \quad v = 2, \quad y = \frac{t}{2\pi}, \quad z = \frac{t}{2\pi a}$$

gesetzt. Aus I folgt dann für $1 \leqq a < b < 2a < \frac{t}{\pi}$

$$\left|\sum_{a \leqq n \leqq b} n^{it}\right| \leqq K\left(t^{\frac{43}{294}} a^{\frac{158}{294}} + t^{\frac{147}{982}} a^{\frac{521}{982}} + t^{\frac{71}{494}} a^{\frac{268}{494}} + t^{\frac{17}{110}} a^{\frac{57}{110}} + a^{\frac{4}{5}}\right),$$

d. h. (partielle Summation)

$$\left|\sum_{a \leqq n \leqq b} n^{-\frac{1}{2}+it}\right| \leqq K\left(t^{\frac{43}{294}} a^{\frac{11}{294}} + t^{\frac{147}{982}} a^{\frac{30}{982}} + t^{\frac{71}{494}} a^{\frac{21}{494}} + t^{\frac{17}{110}} a^{\frac{2}{110}} + a^{\frac{3}{10}}\right).$$

Dieses wende ich, wenn b_1 die größte ganze Zahl unter t_1 bezeichnet, auf die Abschnitte (a_q, b_q) mit

$$\left(1 \leqq q \leqq \left[\frac{\log b_1}{\log 2}\right]\right) \qquad a_q = \left[\frac{b_1}{2^q}\right] + 1, \qquad b_q = \left[\frac{b_1}{2^{q-1}}\right]$$

an und summiere. Dann folgt

$$\left|\sum_{1 \leqq n < t_1} n^{-\frac{1}{2}+it}\right| = \left|\sum_{1 \leqq n < t_1} n^{-\frac{1}{2}-it}\right|$$

$$\leqq K\left(t^{\frac{43}{294}} t_1^{\frac{11}{294}} + t^{\frac{147}{982}} t_1^{\frac{30}{982}} + t^{\frac{71}{494}} t_1^{\frac{21}{494}} + t^{\frac{17}{110}} t_1^{\frac{2}{110}} + t_1^{\frac{3}{10}}\right) \leqq K t^{\frac{163}{988}}.$$

IV liefert jetzt die Behauptung (3).

Anwendung auf das Piltzsche Teilerproblem. In der zweiten der in Fußnote 5 genannten Abhandlungen leiten Hardy und Littlewood für die Restfunktion $\Delta_k(x)$ des Piltzschen Teilerproblems k-ter Dimension aus (1) die Abschätzung

$$(k \geqq 4) \qquad \Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{k-1}{k+2}+\varepsilon}\right)$$

ab. Analog führt (3), wie jetzt kurz auseinandergesetzt werden

soll, zu dem für $k = 4$ ebenso guten, für $k \geqq 5$ aber besseren Ergebnis

$$(4) \quad (k \geqq 4) \qquad \Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{163k-158}{163k+336}+\varepsilon}\right).$$

S. 71 jener Abhandlung $\mu = \operatorname{Max}\left(\frac{326}{988} - \frac{326}{988}\sigma + \delta,\ \delta\right)$; S. 72 in (4.531) $\beta = \alpha\sigma + (k-4)\left(\frac{326}{988} - \frac{326}{988}\sigma + \delta\right)$, in (4.55) $\gamma_1 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{163}{988}k - \frac{1640}{988} + (k-3)\delta$, in (4.64) $\gamma_s = \frac{1}{2}\alpha + \frac{163}{988}k - \frac{652}{988} + (k-3)\delta$; S. 73 rechts in (4.67) viertes Glied $\frac{1}{2}\alpha + \frac{163}{988}k - \frac{652}{988} + (k-3)\delta$, sodann $\alpha - 1 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{163}{988}k - \frac{652}{988}$, d. h. $\frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{163k-158}{163k+336}$, woraus (4) folgt.

Wiesbaden, den 17. März 1924.

Zur Thermodynamik der Reaktionen in den Gemengen zweier Kristallarten.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 18. Juli 1924.

Eine Reihe von Untersuchungen der letzten Jahre hat gelehrt, daß Reaktionen, an denen sich nur feste Stoffe beteiligen, sich doch mit unerwartet großer Geschwindigkeit vollziehen können. Die Ansicht, daß feste Stoffe mit einander nicht oder nur sehr träge reagieren können, ist nicht zutreffend. Im Gegenteil darf man sagen, daß die Reaktionsfähigkeit fester Stoffe eine ganz allgemeine ist, und daß sie bei hinreichend hoher Temperatur immer auftritt, wenn nicht wie bei vielen Kohlenstoffverbindungen schon vor dem Erreichen dieser hinreichend hohen Temperatur Zersetzungen eintreten.

Auf einige Reaktionen, an denen sich nur feste Stoffe beteiligen, sei besonders hingewiesen. Reaktionen zwischen Metallen, ihren gesättigten Mischkristallen oder intrametallischen Verbindungen[1]) sind häufig. Fein verteilter Kohlenstoff und Silizium reagieren bei 1220° stürmisch mit einander[2]). SiO_2 beginnt bei 1000° auf CaO und BaO einzuwirken[3]). Doppelte Umsetzungen in den pulverförmigen Mischungen zweier Kristallarten beginnen häufig bei auffallend niedrigen Temperaturen mit erheblicher Geschwindigkeit[4]).

Da den Reaktionen in pulverförmigen Mischungen zweier Kristallarten der feste Zustand ein Hindernis nicht bietet, so hat man sich die Frage vorzulegen, unter welchen Bedingungen diese Reaktionen einseitig verlaufen und unter welchen sie zu Gleichgewichten zwischen den beteiligten Kristallarten führen können.

Als den einfachsten Fall untersuchen wir zuerst die Reaktionen

---

1) Lehrbuch der Metallographie, 3. Auflage, S. 217, 244.

2) Zeitschr. anorg. u. allg. Chem., 115, S. 141, 1920.

3) J. A. Hedvall, Zeitschr. anorg. u. allg. Chem., 98, S. 57, 1916.

4) J. A. Hedvall u. Heuberger, Zeitschr. anorg. u. allg. Chem., 122, S. 187, 1922, 128, S. 153, 1923 u. 135, S. 419, 1924.

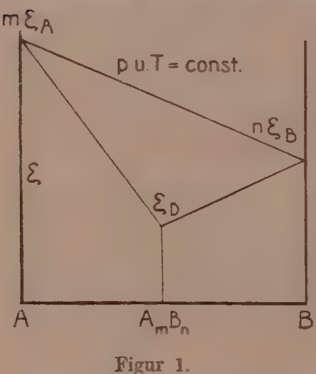
fester Stoffe, welche mit einander keine Mischkristalle bilden, deren Zusammensetzung also in allen Gemengen eine unveränderliche ist. Dieser Bedingung genügen viele einfache Additionsreaktionen und eine Reihe doppelter Umsetzungen.

1. Additionsreaktionen.

Aus zwei anisotropen Stoffen A und B bildet sich ein dritter anisotroper Stoff D nach der Reaktionsgleichung:

$$mA + nB = A_m B_n.$$

Das thermodynamische Potential für jede anisotrope Phase bestimmter Zusammensetzung ist gleich ihrer molaren ζ-Funktion, deren Wert durch den Druck p und die Temperatur T bestimmt ist. Die molaren ζ-Werte der Gemenge zweier Kristallarten ergeben sich nach der Mischungsregel, sie liegen also auf Geraden, welche die ζ-Werte der Komponenten des Gemenges verbinden.



Figur 1.

In Fig. 1 sind ζ_A, ζ_B und ζ_D die molaren Werte des thermodynamischen Potentials der Kristallarten A, B und $A_m B_n$, multipliziert mit ihren Molekülzahlen entsprechend der Reaktionsgleichung.

Wenn die Verbindung D stabiler ist als das Gemenge ihrer Komponenten, so muß bei der betreffenden Temperatur der ζ-Wert von D kleiner sein als der des Gemenges von mA und nB. Im Gemenge von A und B mit der Zusammensetzung $A_m B_n$ ist also der stabile Endzustand erst erreicht, wenn alles A und B sich zu D verbunden hat, und in Gemengen, welche entweder A oder B überschüssig enthalten, ist der stabile Endzustand erst erreicht, wenn die nicht überschüssige Komponente verschwunden ist, wenn also der betreffende ζ-Wert auf eine der Geraden $\zeta_A \zeta_D$ oder $\zeta_B \zeta_D$ gesunken ist. Wenn das nicht der Fall wäre, so würde der ζ-Wert des Gemenges der drei Kristallarten A, B und D, der immer durch einen Punkt des Dreiecks $\zeta_A \zeta_B \zeta_D$ gegeben ist, größer sein als der ζ-Wert auf den beiden Geraden $\zeta_A \zeta_D$ und $\zeta_B \zeta_D$ bei derselben Zusammensetzung des Gemenges.

Im pulverförmigen Gemenge zweier Kristallarten ist also der stabile Endzustand erst erreicht, wenn die nicht überschüssige Komponente vollständig durch die Reaktion aufgezehrt ist. Aller-

dings kann dieser stabile Endzustand wohl kaum ganz erreicht werden, wenn nicht durch Umrühren des Gemenges oder längeres Verreiben desselben für eine hinreichende Vermischung Sorge getragen wird. Ferner ergibt sich, daß man sich bei der Untersuchung der Stabilitätsbedingungen bei Änderung von p und T auf das Gemenge äquivalenter Mengen beider Kristallarten beschränken darf.

Die ζ-Werte der drei Kristallarten werden durch je eine Gleichung der folgenden Form bestimmt:

$$\zeta = E - \eta T + vp. \tag{1}$$

Hier bezeichnet E den molaren Energieinhalt des Stoffes, η seine molare Entropie und v sein Molekularvolumen im Zustandspunkt p, T.

Wenn wir uns zuerst auf kleine Drucke beschränken, so ist das Glied, vp, die äußere Arbeit, zu vernachlässigen.

Die Richtung des Reaktionsverlaufes ist bei verschiedenen Temperaturen auf Grund folgender Beziehung zu beurteilen.

$$\frac{m\zeta_A + n\zeta_B}{m+n} \gtreqless \zeta_D. \tag{2}$$

Es bildet sich die Kristallart D aus den beiden Kristallarten A und B, wenn die linke Seite der Gleichung größer ist als die rechte, und die Kristallart D spaltet sich in A und B, wenn die umgekehrte Beziehung besteht. Alle drei Kristallarten können nur dann neben einander bestehen, wenn die Ungleichung zu einer Gleichung wird, und das ist nur möglich in einem bestimmten Zustandspunkt. Die Gleichgewichtsbedingung lautet nach Einführung der Größen von (1) in die Gleichung (2):

$$m\zeta_A + n\zeta_B - \zeta_D = mE_A + nE_B - E_D - (m\eta_A + n_B - \eta_D)\,T = 0. \tag{3}$$

Das Gesetz von Neumann-Kopp sagt aus, daß die Molekularwärme gleich ist der Summe der Atomwärme, daß also:

$$m(C_p)_A + n(C_p)_B - (C_p)_D = 0. \tag{4}$$

Hieraus folgt für jedes beliebige T:

$$m\left(\frac{C_p}{T}\right)_A + n\left(\frac{C_p}{T}\right)_B - \left(\frac{C_p}{T}\right)_D = 0,$$

und da $\eta = \int_{T=0}^{T} \frac{C_p}{T}\,dT$ ist, so hat man zu schreiben:

$$m\eta_A + n\eta_B - \eta_D = m\int_{T=0}^{T}\left(\frac{C_p}{T}\right)_A dT + n\int_{T=0}^{T}\left(\frac{C_p}{T}\right)_B dT - \int_{T=0}^{T}\left(\frac{C_p}{T}\right)_D dT = 0. \tag{5}$$

Wenn die molekulare spezifische Wärme einer Verbindung streng additiv ist und zwar von $T = 0$ bis zur Temperatur T, so gilt das auch für ihre molekulare Entropie. Voraussetzung ist, daß nach dem Wärmesatz von Nernst $\eta = 0$ bei $T = 0$ ist.

Wenn die molare Entropie einer kristallisierten Verbindung streng additiv aus den molaren Entropien ihrer Komponenten zusammengesetzt ist, so folgt aus der Gleichung (3), daß die drei Kristalle bei kleinen Drucken mit einander nicht ins Gleichgewicht kommen können. Denn sonst müßte die Bildungswärme der Verbindung, das Glied:

$$m E_A + n E_B - E_D = 0$$

sein. Das widerspricht aber nicht nur der Erfahrung, sondern würde auch dazu führen, daß das Gleichgewicht bei einem unveränderlichen Druck für eine Reihe von Temperaturen bestehen müßte.

Wenn die Additivität der molaren Entropien besteht, so ist, wie aus der Gleichung (3) ersichtlich, die Bildungswärme der Verbindung unabhängig von der Temperatur. Es entspricht das dem Satz von Kirchhoff, daß die Änderung der Bildungswärme mit der Temperatur durch die Differenz der spezifischen Wärmen der beiden Komponenten und der der Verbindung bestimmt wird.

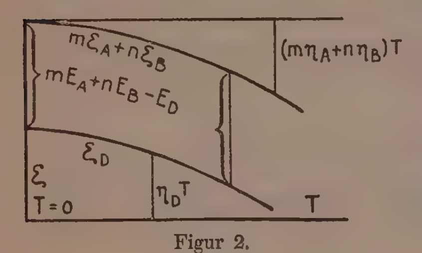
Damit die drei Kristallarten mit einander ins Gleichgewicht kommen können, darf die Additivität der molaren Entropien nicht ganz zutreffen, und außerdem muß die Bildungswärme der Verbindung klein sein, da sie sonst nicht durch die Differenz der Entropien: $m\eta_A + n\eta_B - \eta_D$, kompensiert werden kann. Die Affinität der Komponenten zu einander muß also klein sein. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, so geht die Reaktion unter Freiwerden von Wärme nach der Seite des geringeren Energieinhaltes vor sich, wobei die Mischung den kleinstmöglichen Energieinhalt annimmt.

Das Auftreten einer Gleichgewichtstemperatur, die bei hinreichender Reaktionsgeschwindigkeit durch das Auftreten eines Haltepunktes auf der Abkühlungskurve so leicht festzustellen ist, lehrt also, daß die Additivität der Entropien und damit auch die der spezifischen Wärmen nicht genau zutrifft.

2. Die graphische Interpretation der Gleichgewichtsbedingungen.

In Fig. 2 sind die Größen der Gleichung (3) für einen kleinen unveränderlichen Druck in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt. Wenn die Entropien additiv sind, dann müssen die Ab-

stände der beiden ζ-Kurven $m\zeta_A + n\zeta_B$ und ζ_D von einander bei allen Temperaturen dieselben sein, und eine Gleichgewichtstemperatur kann nicht auftreten, da sich die beiden ζ-Kurven nicht schneiden. Wenn dagegen, wie in Fig 3, die Bildungswärme der Verbindung

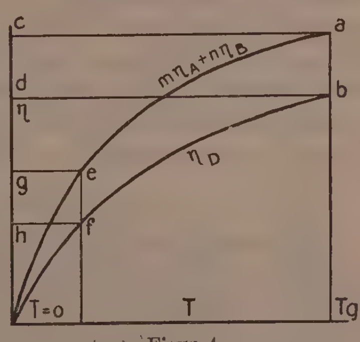


Figur 2. Figur 3.

bei $T = 0$ klein ist, und eine Abweichung von der Additivität der Entropien besteht, so können sich die beiden ζ-Kurven schneiden, und die Temperatur T_g ihres Schnittpnktes ist die Gleichgewichtstemperatur der drei Kristallarten. Unterhalb T_g ist nur die Verbindung stabil, oberhalb T_g sind es ihre beiden Komponenten. Das System verhält sich also ganz analog wie ein Einstoffsystem mit einem Umwandlungspunkt.

Aus dem η-T-Diagramm ergeben sich folgende Beziehungen. In diesem Diagramm entsprechen den Größen der Gleichung (3) Flächen.

Bei der Gleichgewichtstemperatur T ist $mE_A + nE_B - E_D$ gleich dem Rechteck $abcd$, Fig. 4, denn für T_g gilt:



Figur 4.

(6) $$[mE_A + nE_B - E_D]_{T_g} = [m\eta_A + n\eta_B - \eta_D]\, T_g = U_{p,\,T_g}.$$

Beide Differenzen sind gleich der Reaktionswärme $U_{p,\,T_g}$, und die zweite Differenz mal T_g ist gleich dem Rechteck $abcd$.

Ferner gilt:

$$U_{p,\,T=0} = \int_{T=0}^{T_g} [m\eta_A + n\eta_B - \eta_D]\, dT$$

oder $U_{p,\,T}$ ist gleich der Fläche zwischen den beiden η-Kurven abc.

Bei einer beliebigen Temperatur T zwischen $T = 0$ und T_g gilt $m\zeta_A + n\zeta_B - \zeta_D > 0$.

Da $\int \frac{d_p \zeta}{dT} dT = \int \eta \, dT$, so gilt auch:

$$m\zeta_A + n\zeta_B - \zeta_D = \int_T^{T_g} (m\eta_A + n\eta_B - \eta_D) \, dT$$

und da:

$$m\zeta_A + n\zeta_B - \zeta_D = mE_A + nE_B - E_D - [m\eta_A + n\eta_B - \eta_D] T,$$

so ergibt sich:

$$mE_A + nE_B - E_D = \int_T^{T_g} [m\eta_A + n\eta_B - \eta_D] \, dT + [m\eta_A + n\eta_B - \eta_D] T.$$

Bei T ist die Reaktionswärme gleich dem Flächenstück *abcf* plus dem Reckteck *efgh*.

Die Reaktionswärme kann also für jede Temperatur zwischen $T = 0$ und T_g dem Diagramm entnommen werden, oder aus einer vorgelegten Reaktionswärme kann für die Temperatur, auf die sie sich bezieht, die Differenz der beiden η-Werte ermittelt werden.

Auch aus dem η-T-Diagramm sind die Bedingungen des Gleichgewichts der drei Kristallarten zu ersehen. Wenn die molare Entropie der Verbindung additiv aus der der Komponenten zusammengesetzt ist, so fallen die beiden η-Kurven zusammen; da aber die Energiedifferenz einen bestimmten Wert hat, so kann die Gleichgewichtsbedingung (3) nicht erfüllt werden. Dasselbe wird auch zutreffen, wenn die Energiedifferenz groß ist, da sie dann nicht durch die Entropiedifferenz mal der absoluten Temperatur kompensiert werden kann. Hierzu darf die Bildungswärme der Verbindung für T zwischen 500—1000° kaum mehr als 1000 cal pro Mol betragen, da sie sonst größer bleibt als die Entropiedifferenz mal der absoluten Temperatur. Bei größerer Bildungswärme ist die Tendenz zur ausschließlichen Bildung der Verbindung vorhanden.

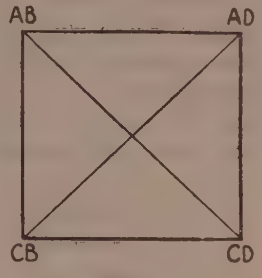
3. Doppelte Umsetzungen.

Aus zwei Kristallarten der Zusammensetzung $A_m B_n$ und $C_o D_p$ können durch doppelte Umsetzung die beiden Kristallarten $A_m D_p$ und $B_n C_o$ entstehen. A, B, C und D können Elementen oder Gruppen von Elementen entsprechen. Am einfachsten gestaltet sich die Reaktionsgleichung, wenn die Wertigkeit der einzelnen Gruppen dieselbe ist:

$$AB + CD = AD + BC.$$

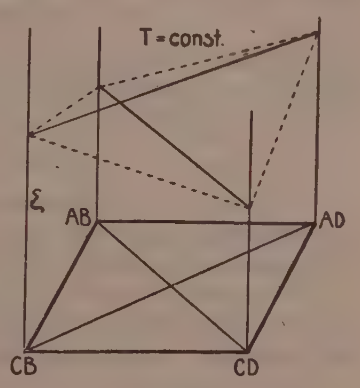
Wenn m, n, o und p nicht gleiche ganze Zahlen sind, so erhalten die Symbole der einzelnen Kristallarten ganzzahlige Faktoren, welche die Zahl der Valenzen in allen Symbolen gleichmachen.

Um alle Gemenge der vier Kristallarten durch Punkte einer Ebene darzustellen, wählen wir das Quadrat, Fig. 5, dessen Ecken den Zusammensetzungen der vier Kristallarten entsprechen. Die Zusammensetzungen der Gemenge, welche nur die beiden Kristallarten einer Seite der Reaktionsgleichung enthalten, werden durch Punkte der Quadratdiagonalen $AB - CD$ und $AD - BC$ wiedergegeben. Äquivalente Mengen von AB und CD, sowie von AD und BC entsprechen dem Schnittpunkt der beiden Diagonalen.



Figur 5.

Trägt man die molaren ζ-Werte der vier Kristallarten als Senkrechte zur Quadratebene über deren Eckpunkten auf, so werden die ζ-Werte der sechs Reihen binärer Gemenge auf Geraden liegen, welche die ζ-Werte der vier Eckpunkte verbinden. Diese sechs Geraden sind die Kanten eines Tetraeders, Fig. 6.



Figur 6.

Wenn der ζ-Wert des Gemenges mit äquivalenten Mengen von AD und BC kleiner ist als der des Gemenges von AD und CD, so kann die doppelte Umsetzung nach der Reaktionsgleichung nur von links nach rechts vor sich gehen, und dasselbe gilt nicht nur für das äquivalente Gemenge, sondern auch für alle möglichen Gemenge.

Der ζ-Wert eines Gemenges dreier Kristallarten wird durch einen Punkt der Ebene angegeben, die durch die ζ-Werte der drei Kristallarten geht. Die beiden Tetraederebenen tiefster Lage befinden sich über den Dreiecken AB, AD, CB und AD, CB, CD. Daher können beliebige Gemenge im stabilen Zustande nur drei Kristallarten enthalten, nämlich die beiden mit der tiefstliegenden Tetraederkante (AD und BC) und eine überschüssige Kristallart. Die Gegenwart der vierten Kristallart ist mit der absoluten Stabilität des Systems unverträglich.

Nur bei einer bestimmten Temperatur, bei der die beiden Tetraederkanten über $AB - CD$ und $CD - AD$ sich schneiden, also in eine Ebene fallen, können die vier Kristallarten mit ein-

ander ins Gleichgewicht kommen. Bei der Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen braucht man also nur die ζ-Werte der beiden äquivalenten Gemenge zu vergleichen. Diese Ableitung ist in ganz analoger Weise wie beim ersten Fall durchzuführen und sie führt auch zu einem analogen Resultat. Ein Gleichgewicht der vier Kristallarten bei der Temperatur T_n ist nur dann zu erwarten, wenn die Reaktionswärme klein ist und eine Abweichung von der Additivität der molaren Entropien besteht.

4. Die Bedingungen für das Auftreten von Gleichgewichten bei höheren Drucken.

Der Kürze wegen sollen im Folgenden die Summen der ζ-Werte, der E, η oder v-Werte der Kristallarten auf der linken Seite der Reaktionsgleichungen:

$$mA + nB = A_m B_n$$

oder

$$AB + DC = AD + BC$$

die einfach gestrichelten Benennungen jener Größen und für jene Summen der rechten Seite die doppelt gestrichelten Benennungen benutzt werden. Die allgemeine Gleichung lautet dann:

$$\zeta' - \zeta'' = E' - E'' - (\eta' - \eta'')T + (v' - v'')p.$$

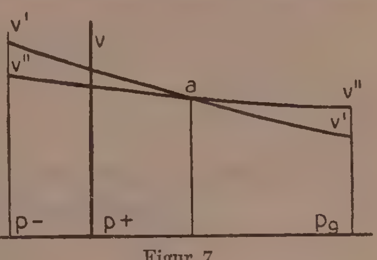
Bei $T = 0$ ist die Beantwortung der Frage nach den Gleichgewichtsbedingungen besonders einfach, da hier nach dem Wärmesatz von Nernst $\eta' - \eta'' = 0$ ist.

Wenn $E' > E''$ und für beliebig hohe Drucke $v' > v''$ ist, so ist bei allen Drucken $\zeta' > \zeta''$, oder das Gemenge der Kristallarten mit größerem Energieinhalt bei $T = 0$ und $p = 0$ bleibt auch bei den höchsten Drucken instabil, wenn die Summe seiner Molekularvolumen bei beliebig wachsendem Druck größer bleibt als die Summe der Molekularvolumen der Kristallarten mit kleinerem Energieinhalt.

Wenn aber die umgekehrte Beziehung zutrifft, so muß bei einem hinreichend hohen Druck das Glied $(v' - v'')p$ das Glied $E' - E''$ kompensieren können. Der Druck p_g, für den das zutrifft, ist der Gleichgewichtsdruck, bei dem $\zeta' - \zeta''$ durch den Nullwert geht.

Auch wenn bei p und $T = 0$, $E' - E''$ und $v' - v''$ größer als null sind, aber das Vorzeichen von $v' - v''$ bei einem hohen Drucke sich umkehrt, weil $\frac{d_T v'}{dp} > \frac{d_T v''}{dp}$, so können die an der Reaktion teilnehmenden Kristallarten mit einander ins Gleichgewicht kommen. Die Gleichgewichtsbedingung ist dann folgende. Die beiden Flächen

$v'av''$ und $v''av'$ müssen einander gleich sein. Fig. 7. In diesem Fall kann, wenn bei $T = 0$ und $p = 1\ \mathrm{kg/cm^2}$ $v' - v''$ und $E' - E''$ angenähert bekannt sind, der Gleichgewichtsdruck p_g auch nicht angenähert geschätzt werden. Eine solche Schätzung ist nur dann möglich, wenn $v' - v'' < 0$ ist, oder der Punkt a bei negativen Drucken liegt. Dann gilt angenähert:



Figur 7.

$$p_g = \frac{E' - E''}{v' - v''}.$$

Für den Fall, daß bei kleinen Drucken ein Gleichgewicht zwischen den an der Reaktion teilnehmenden Kristallarten bei keiner Temperatur unterhalb des Auftretens einer flüssigen Mischung besteht, kann ein solches Gleichgewicht doch bei höheren Drucken bestehen. Vom Gleichgewichtsdruck p_g bei $T = 0$ verläuft zu höheren Temperaturen eine Gleichgewichtskurve, bis sie von zwei Gleichgewichtskurven mit einer flüssigen Mischung geschnitten wird.

Wenn bei $p = 0$ bei einer bestimmten Temperatur T_g ein Gleichgewicht im Gemenge der Kristallarten eintritt, so können drei Typen von Gleichgewichtskurven unterschieden werden:

1) Die Gleichgewichtskuve fällt mit wachsendem Druck zu tieferen Temperaturen. In diesem Fall ist $E' > E''$ und $v' < v''$.

2) Die Gleichgewichtskurve hat eine maximale Temperatur und einen maximalen Druck. Durch das Maximum der Gleichgewichtstemperatur geht die neutrale Kurve, auf der $v' - v'' = 0$ ist, und durch den Maximalpunkt des Drucks geht die neutrale Kurve, auf der $E' - E'' = 0$ ist.

3) Schließlich kann die mit wachsendem Druck ansteigende Gleichgewichtskurve zwei Kurven schneiden, an deren Gleichgewichten je eine flüssige Mischung beteiligt ist.

Wenn eine der Gleichgewichtskurven die p-Achse schneidet, so ist sie senkrecht zur p-Achse gerichtet, denn es gilt allgemein

$$\frac{dT}{dp} = \frac{v'' - v'}{\eta' - \eta''}$$

und da bei $T = 0$ $\eta' - \eta'' = 0$ ist, $v'' - v'$ aber einen endlichen Wert hat, so wird $\dfrac{dT}{dp} = \infty$.

Nachtrag zu unseren Abhandlungen aus den Jahrgängen 1910 und 1923.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen und **Edmund Landau.**

Vorgelegt von E. Landau in der Sitzung vom 1. August 1924.

Den bekannten Satz

$$\frac{1}{\zeta(s)} \neq O(1) \quad \text{für } \sigma > 1 \tag{1}$$

werden wir heute in § 2 ohne Benutzung der Kroneckerschen Sätze über diophantische Approximationen beweisen. Auf demselben Wege werden wir in § 3 einen Beweis des bekannten Satzes

$$\zeta(s) \neq O(1) \quad \text{für } \sigma > 1 \tag{2}$$

erbringen; durch eine leichte Abänderung dieser Methode wird sich in § 4 sogar mit einem Schlage

$$\zeta(1+ti) \neq O(1) \tag{3}$$

ergeben, was früher nur unter Heranziehung des Phragmén-Lindelöfschen Satzes und nicht ganz ohne Mühe aus (2) gefolgert wurde.

In § 5 werden wir auf dem alten Wege, indem wir überdies eine Bemerkung benutzen, die uns Herr Littlewood beim Lesen unserer 1923er Arbeit sofort machte, unseren damaligen Satz

$$\frac{1}{\zeta(1+ti)} \neq o\left(\frac{\log\log t}{\log\log\log t}\right),$$

zu

$$\frac{1}{\zeta(1+ti)} \neq o(\log\log t) \tag{4}$$

verschärfen. So entsteht das genaue Gegenstück zu unserm 1910er Satz

$$\zeta(1+ti) \neq o(\log\log t),$$

und unter Annahme der Riemannschen Vermutung wäre

$$0 < \limsup_{t=\infty} \frac{\left|\frac{1}{\zeta(1+ti)}\right|}{\log\log t} < \infty.$$

§ 1.
Hilfssätze.

Hilfssatz 1: *Es sei*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $\sigma = \sigma_0$ *absolut konvergent. Dann existiert der Mittelwert*

$$\mathfrak{M}|f^2| = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(\sigma_0 + ti)|^2 \, dt$$

und ist

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma_0}}.$$

(Das ist ein Spezialfall des leicht beweisbaren Hadamardschen Satzes 32 auf S. 779 des *Handbuchs.*)

Hilfssatz 2: *Falls*

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

und

$$h(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{m^s}$$

für $\sigma = \sigma_0$ *absolut konvergieren und jedes* n *mit* $b_n \neq 0$ *zu jedem* m *mit* $c_m \neq 0$ *teilerfremd ist, so ist*

$$\mathfrak{M}|(gh)^2| = \mathfrak{M}|g^2|\,\mathfrak{M}|h^2|.$$

(In

$$g(s)\,h(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_r}{r^s}$$

entsteht nämlich jedes $d_r \neq 0$ nur aus **einem** Produkte $b_n c_m$ mit $nm = r$. Daher ist nach Hilfssatz 1

$$\mathfrak{M}|(gh)^2| = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|d_r|^2}{r^{2\sigma_0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n^{2\sigma_0}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m|^2}{m^{2\sigma_0}} = \mathfrak{M}|g^2|\,\mathfrak{M}|h^2|.)$$

Zusatz: Die Voraussetzung der absoluten Konvergenz der beiden Reihen für $\sigma = \sigma_0$ läßt sich durch die schwächere ersetzen, daß die beiden Reihen konvergieren und die Mittelwerte von

$|g^2|$, $|h^2|$ und $|(gh)^2|$ vorhanden und gleich den beim Beweise vorkommenden Reihen sind.

Hilfssatz 3: *Falls* $\varphi(t)$ *für* $a \leqq t \leqq b$, *wo* $b > a$, *stetig und* $\geqq 0$ *ist, so ist bei* $n \to \infty$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi(t))^n\,dt} \to \underset{a \leqq t < b}{\text{Max.}}\ \varphi(t).$$

Beweis: Klar.

§ 2.
Neuer Beweis von (1).

Aus Hilfssatz 2 folgt für $\sigma_0 > 1$, jedes ganze $k > 0$ und jedes ganze $N > 0$, wenn

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)\eta_N(s)$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{M}\left|\frac{1}{\zeta^{2k}(s)}\right| = \prod_{n=1}^{N}\mathfrak{M}\left|\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)^{2k}\right| \cdot \mathfrak{M}\,|\eta_N^{2k}(s)| \geqq \prod_{n=1}^{N}\mathfrak{M}\left|\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)^{2k}\right|$$

(weil die Dirichletsche Reihe für $\eta_N^k(s)$ mit $1 + \cdots$ beginnt). Nun ist für jede Primzahl p wegen der Periodizität von $p^{\sigma_0 + ti}$

$$\mathfrak{M}\left|\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{2k}\right| = \frac{1}{\frac{2\pi}{\log p}}\int_0^{\frac{2\pi}{\log p}}\left|1-\frac{1}{p^s}\right|^{2k}dt,$$

also nach Hilfssatz 3 bei $k \to \infty$

$$\sqrt[2k]{\mathfrak{M}\left|\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{2k}\right|} \to \underset{\sigma=\sigma_0}{\text{Max.}}\left|1-\frac{1}{p^s}\right| = 1+\frac{1}{p^{\sigma_0}},$$

$$\liminf_{k=\infty}\sqrt[2k]{\mathfrak{M}\left|\frac{1}{\zeta^{2k}(s)}\right|} \geqq \prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{p_n^{\sigma_0}}\right).$$

$N \to \infty$ lehrt

$$\liminf_{k=\infty}\sqrt[2k]{\mathfrak{M}\left|\frac{1}{\zeta^{2k}(s)}\right|} \geqq \prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^{\sigma_0}}\right) = \frac{\zeta(\sigma_0)}{\zeta(2\sigma_0)}.$$

Es gibt also ein $t_0 = t_0(\sigma_0)$ mit

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma_0 + t_0 i)}\right| > \frac{\zeta(\sigma_0)}{\zeta(2\sigma_0)} - 1.$$

Nun folgt aber (1) aus $\sigma_0 \to 1$.

§ 3.
Neuer Beweis von (2).

Ganz ebenso ergibt sich für $\sigma_0 > 1$

$$\liminf_{k=\infty} \sqrt[2k]{\mathfrak{M}\,|\zeta^{2k}(s)|} \geqq \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^{\sigma_0}}} = \zeta(\sigma_0).$$

Es gibt also wegen

$$\mathfrak{M}\,|\zeta^{2k}(s)| = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega-1}\int_1^{\omega} |\zeta^{2k}(s)|\,dt$$

ein $t_0 = t_0(\sigma_0) > 1$ mit

$$|\zeta(\sigma_0 + t_0 i)| > \zeta(\sigma_0) - 1.$$

§ 4.
Neuer Beweis von (3).

Für jedes ganze $k > 0$ ist

$$\left(\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s)\right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(k)}{n^s}$$

nach dem Stieltjesschen Spezialfall $\lambda_n = \log n$ des Satzes 22 auf S. 759 des *Handbuchs* für ein $s = s(k) < 1$ konvergent. Also ist nach dem Schneeschen Spezialfall $\lambda_n = \log n$ des Satzes 41 auf S. 798—799

$$\mathfrak{M}\,|((1-2^{-ti})\,\zeta(1+ti))^{2k}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(k)}{n^2}.$$

Für $N > 1$ ist

$$\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s) = \prod_{n=2}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}} \cdot \left(\frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}}\,H_N(s)\right),$$

wo der letzte Faktor eine für ein $s = s(k) < 1$ konvergente, für $s > 1$ absolut konvergente, mit $1 + \cdots$ beginnende Dirichletsche Reihe, also

$$\mathfrak{M}\left|\left(\frac{1-2^{-ti}}{1-2^{-1-ti}}\,H_N(1+ti)\right)^{2k}\right| \geqq 1$$

ist. Der Zusatz zu Hilfssatz 2 gibt

$$\mathfrak{M}\,|((1-2^{-ti})\,\zeta(1+ti))^{2k}| \geqq \prod_{n=2}^{N} \mathfrak{M}\left|\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^{1+ti}}}\right)^{2k}\right|,$$

also

$$\liminf_{k=\infty} \sqrt[2k]{\mathfrak{M}|((1-2^{-ti})\zeta(1+ti))^{2k}|} \geqq \prod_{n=2}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}.$$

Daher ist

$$\sqrt[2k]{\mathfrak{M}|((1-2^{-ti})\zeta(1+ti))^{2k}|} \to \infty.$$

Also ist $(1-2^{-ti})\zeta(1+ti)$ nicht für $t>0$ beschränkt, also $\zeta(1+ti)$ nicht für $t>1$.

§ 5.
Beweis von (4).

Wird auf S. 77, Z. 7 v. u. unserer 1923er Arbeit

$$\delta = \frac{1}{\log N}$$

gesetzt, so ergibt sich aus S. 78, Z. 1 und

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^{1+\delta}} < \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{1}{(a_{11}\nu\log\nu)^{1+\delta}} < \frac{a_{12}}{\log N} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+\delta}}$$
$$< \frac{a_{12}}{\log N \cdot \delta \cdot N^{\delta}} = \frac{a_{12}}{e},$$

daß

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| > \frac{a_{13}}{\delta} = a_{13}\log N > a_{14}\log\log t$$

ist. Aus

$$\frac{1}{\zeta(s)} \neq o(\log\log t)$$

folgt aber (4) wegen des Phragmén-Lindelöfschen Satzes genau nach dem Muster der dortigen S. 78—80, nur entsprechend einfacher.

Einige Bemerkungen zur Theorie der Dampfspannungskurve.

Von

Richard Lorenz (Frankfurt a. M.).

Vorgelegt von G. Tammann in der Sitzung vom 21. März 1924.

§ 1. Das im Jahre 1878 von U. Dühring aufgestellte „Gesetz der korrespondierenden Siedetemperaturen“ wird, wie eine Durchsicht der neueren physikal.-chemischen Literatur erkennen läßt, in steigendem Maße zur Orientierung über den Verlauf von Dampfspannungskurven angewendet und erweist sich dabei als bequem und überraschender Weise auch als merkwürdig exakt. In noch viel höherem Maße würde dies Gesetz aber für solche Zwecke nützlich sein können, wenn die hierzu erforderlichen „spezifischen Faktoren“ leichter zugänglich wären. Zu ihrer Bestimmung nach Dühring ist immerhin die Kenntnis mindestens eines Teiles einer Dampfdruckkurve erforderlich. Im nachfolgenden wird jedoch gezeigt, wie dieser Mangel umgangen werden kann.

§ 2. Bezeichnet man mit $T_1\, T_2$ zwei zu den Drucken $p_1\, p_2$ zugehörige Punkte der Dampfdruckkurve eines Stoffes I und mit $\Theta_1\, \Theta_2$ die entsprechenden auf die gleichen Drucke bezüglichen Siedepunkte auf der Dampfspannungskurve eines Stoffes II so ist nach Dühring

$$(1) \qquad \frac{T_2 - T_1}{\Theta_2 - \Theta_1} = q$$

worin q eine Stoffkonstante bedeutet, welche der „spezifische Faktor“ genannt wird. Dühring wählte als allgemeinen Vergleichsstoff (II) das Wasser, wahrscheinlich weil in damaliger Zeit die Dampfspannungskurve dieses Stoffes am genauesten bekannt war. Hierin liegt jedoch ein Fehler, wie neuere Untersuchungen gezeigt haben. Auch ist auf diesen Umstand die öftere Nichtbestätigung dieses Gesetzes im Laufe seiner wiederholten experimentellen Prüfung zurückzuführen. Heutzutage ist es uns auf dem grossen Gebiet der Vergleichung der Eigenschaften der Stoffe durchaus geläufig geworden, immer nur Stoffe gleicher Molekularkonstitution mit einander zu vergleichen. Früher hat man dies allgemein unbeachtet gelassen. Beispielsweise gehört Wasser zu der Gruppe von assoziierten Stoffen. Nach den Regeln der Thermodynamik müssen die Gleichgewichtsverhältnisse zwischen den Phasen flüssig-gasförmig hiervon beeinflußt sein, also auch die Dampfspannungskurve.

Die Unterschiede sind zwar nicht groß aber sie genügen, um die Bedeutung des Dühringschen Gesetzes herabzusetzen. C. von Rechenberg unterscheidet drei Typen von Dampfspannungskurven, für deren eine er das reine Hexan als Normalstoff wählt, deren zweite dem Wasser entspricht und drittens solche, bei denen starke Dissoziationen auftreten (z. B. Molekularsadditionsverbindungen u. dgl.). Sobald man diese typischen Unterscheidungen einführt, stößt man auf keine Widersprüche gegen das Gesetz von Dühring. Es liegen also hier die Verhältnisse nicht anders als z. B. auf dem Gebiete der Anwendung der Theorie von van der Waals und des Theorems der übereinstimmenden Zustände. Wie ich bereits anderweitig hervorgehoben habe, kann man dies in folgender Weise charakterisieren: in den Zustandsgleichungen sind die chemischen Eigenschaften der wirklichen Stoffe nicht enthalten, vielmehr beziehen sie sich auf einen lediglich in Bezug auf die Abweichungen vom idealen Gaszustande idealisierten Stoff.

§ 3. Bekanntlich haben Ramsay und Young gelegentlich ihrer berühmten Prüfung des Theorems der übereinstimmenden Zustände eine andere Beziehung der Dampfspannungskurve abgeleitet. Dieselbe lautet in obiger Bezeichnungsweise

$$\frac{T_2}{\Theta_2} = \frac{T_1}{\Theta_1} + c(T_2 - T_1) \tag{2}$$

und hierin ist c eine den Stoffen eigentümliche Konstante. Es ist schon darauf hingewiesen worden (zuletzt von mir), daß diese Formel in das Gesetz von Dühring übergeht wenn $c = 0$ ist. Es wird dann nämlich

$$\frac{T_2}{\Theta_2} = \frac{T_1}{\Theta_1} \quad \text{oder} \quad T_2 - T_1 = T_1 \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_1}$$

also

$$\frac{T_2 - T_1}{\Theta_2 - \Theta_1} = \frac{T_1}{\Theta_1} = \text{Konst.} \tag{3}$$

was formal das Gesetz von Dühring ist.

In der Zwischenzeit haben die Experimentalfortschritte auf diesem Gebiete gelehrt, daß die Ramsay-Youngsche Größe c für fast alle Stoffe entweder gleich Null oder so klein ist, daß das mit ihr behaftete Glied vernachlässigt werden kann. Dies ist besonders vom theoretischen Standpunkte aus sehr bemerkenswert, weil sich zeigen läßt, daß für $c = 0$ die Regel von Ramsay und Young aus der Zustandsgleichung von van der Waals folgt.

§ 4. Demgemäß ist von da aus bis zu dem Gesetze von Dühring nur noch ein einziger Schritt und mit ihm müssen alle theoretischen, aber auch alle historischen Unstimmigkeiten verschwinden, die auf diesem Gebiete der Entwicklung der physikal. Chemie aufgetreten sind. Dieser Schritt besteht in dem experimentellen Nachweis daß die Konstante der Gleichung (3), die man bei der Ableitung des Dühringschen Gesetzes aus der Formel von

Ramsay und Young erhält, wirklich mit dem spezifischen Faktor identisch ist.

Man hat also die aus dem Vergleich von (3) und (1) sich ergebende Gleichung

$$\frac{T_1}{\Theta_1} = q \tag{4}$$

zu prüfen. Dies läßt sich an einer Tabelle der spezifischen Faktoren durchführen, welche von C. von Rechenberg herrührt. Dieser vorzügliche Beobachter bestimmte an einem außerordentlich umfangreichen Materiale, wie es nur in der Technik unmittelbar zur Verfügung steht, die Düringschen spezifischen Faktoren auf graphischem Wege nach der Beziehung

$$\Delta T = q \Delta \Theta$$

die ja die Gleichung einer Geraden darstellt, welche überdies die Eigenschaft haben muß durch den Nullpunkt des Koordinatensystems hindurchzugehen. Zur Prüfung von Gleichung 4 habe ich umstehende Tabelle berechnet[1]). In derselben sind verzeichnet: in Kolonne 2 und 3 die Siedepunkte der in Kolonne 1 aufgeführten Stoffe, in gewöhnlicher und absoluter Zählung Weiter in Kolonne 4 die von v. Rechenberg gefundenen spezifischen Faktoren. Hierbei ist der Bezugstoff Wasser oder Hexan durch die Buchstaben W und H gekennzeichnet und beigefügt. In Kolonne 5 findet sich der Ausdruck T_1/Θ_1 (Gl. 4). Die letzte Kolonne enthält die Differenz zwischen diesen beiden Zahlenreihen.

§ 5. Es ist ersichtlich, daß diese beiden Zahlenreihen in befriedigender Weise miteinander übereinstimmen. Demgemäß ist das Dühringsche Gesetz in den Ideenkreis der van der Waalsschen Anschauungen eingereiht. die sich ja andererseits von so außerordentlicher Fruchtbarkeit erwiesen haben. Zugleich ist ein praktisches Ergebnis gewonnen. Nämlich folgendes: die Kenntnis des Siedepunktes eines Stoffes von bestimmtem chemischen Charakter genügt, um den Dühringschen spezifischen Faktor berechnen zu können und um dann weiter nach dem Gesetz der korrespondierenden Siedetemperaturen ein Bild seiner Dampfspannungskurve zu entwerfen. Ich habe von dieser Erkenntnis bereits wiederholt praktischen Gebrauch gemacht und stets, wo es kontrollierbar war, mit dem besten Erfolge. Endlich folgt aus der Darlegung dieser Zusammenhänge die Notwendigkeit auf verschiedenen Gebieten der Thermodynamik Folgerungen zu ziehen, die man bisher vermieden hat. Von diesen werden einige für das Theorem der übereinstimmenden Zustände von besonderer Bedeutung sein.

Frankfurt a. M.,
Institut der Universität für physikal. Chemie.

1) Siehe Seite 176.

Tabelle.

	t_1	T_1	q	T_1/Θ_1	$T_1/\Theta_1 - q$
Sauerstoff	— 182,83	90,26	1,2977 H	0,2638	— 0,0339
Kohlensäure (fest)	— 78,32	197,77	0,496 W	0,5770	+ 0,0260
Ammoniak	— 34,6	238,49	0,7247 H	0,6970	— 0,0276
Chlor	— 33,6	239,49	0,8753 H	0,7000	— 0,1753
Aethyläther	+ 34,60	307,69	0,8838 H	0,8994	+ 0,0156
n-Pentan	+ 36,06	309,15	0,9205 H	0,9057	— 0,0168
Schwefelkohlenstoff	46,25	319,37	0,9641 H	0,9334	— 0,0307
Methylalkohol	64,88	337,97	0,9081 W	0,9058	— 0,0023
n-Hexan	69,00	342,09	1. H	1.	
Aethylacetat	77,12	350,21	0,9639 H	1,0237	+ 0,0600
Aethylalkohol	78,30	351,39	0,9064 W	0,9418	+ 0,0354
Benzol	80,49	353,58	1,0245 H	1,0335	+ 0,090
Cyclohexan	80,81	353,90	1,0398 H	1,0345	— 0,0053
n-Propylalkohol	97,52	370,61	0,9064 W	0,9933	+ 0,0869
n-Heptan	98,61	371,70	1,0245 H	1,0865	+ 0,0620
Wasser	100	373,09	1. W	1.	
Toluol	110,56	383,65	1,1112 H	1,1217	+ 0,0102
Zinnchlorid	114,32	387,41	1,1163 H	1,1327	+ 0,0161
n-Butylalkohol	117,04	390,13	0,9673 W	1,0456	+ 0,0783
n-Oktan	125,44	398,53	1,1237 H	1,1679	+ 0,0412
Aethylbenzol	136,60	409,69	1,1754 H	1,1976	+ 0,0222
α-Pinen	154,70	427,79	1,2320 H	1,2505	+ 0,0185
Isobuttersäure	154,35	427,17	1,1269 W	1,1456	+ 0,0187
Brombenzol	156,04	429,03	1,2346 H	1,2544	+ 0,0198
n-Buttersäure	162,20	435,29	1,1558 W	1,1664	+ 0,0106
Cymol	176,4	449,49	1,2930 H	1,3139	+ 0,0209
Benzaldehyd	178,07	451,16	1,2535 H	1,3188	+ 0,0653
Phenol	182,24	455,33	1,1591 H	1,3310	+ 0,1719
Anilin	184,10	457,19	1,2253 H	1,3364	+ 0,1111
n-Valeriansäure	184,8	457,89	1,1721 W	1,2272	+ 0,0551
Jodbenzol	188,27	461,36	1,3203 H	1,3486	+ 0,0283
Monochloressigsäure	188,9	461,99	1,1549 W	1,2382	+ 0,0833
o-Kresol	190,67	436,76	1,2040 H	1,2767	+ 0,0727
Salicylaldehyd	196,70	469,79	1,3092 H	1,3732	+ 0,0640
Isocapronsäure	199,7	472,79	1,1918 W	1,2672	+ 0,0754
m-Toluidin	203,3	476,39	1,2587 H	1,3925	+ 0,1338
Campher (fest)	204	477,09	1,2444 H	1,3946	+ 0,1502
n-Capronsäure	205,7	478,79	1,2109 W	1,2833	+ 0,0724
Nitrobenzol	209,79	482,88	1,3268 H	1,4115	+ 0,0847
Aethylbenzoat	212,08	485,17	1,3255 H	1,4182	+ 0,0927
Naphtalin	217,96	490,78	1,3933 H	1,4346	+ 0,0413
Citronellol	224,42	497,51	1,2328 H	1,4540	+ 0,2212
Safrol	234,5	507,59	1,3666 H	1,4837	+ 0,1171
Chinolin	237,73	510,82	1,4196 H	1,4932	+ 0,0736
Benzoësäure	249	522,09	1,3164 W	1,3281	+ 0,0117
Glyzerin	290	563,09	1,3956 W	1,5089	+ 0,1133
Cumarin	301,72	574,81	1,5767 H	1,6802	+ 0,1035
Benzophenon	305,89	578,98	1,5448 H	1,6924	+ 0,1476
Dibenzylketon	330,5	603,59	1,5880 H	1,7644	+ 0,1844
Schwefel	444,50	717,59	2,1345 H	2,0976	— 0,0369

Mittel: — 0,0411
+ 0,0707

Zusammensetzung und katalytische Wirkung der Platinelektrosole[1]).

Von

A. de Gregorio Rocasolano in Zaragoza.

Vorgelegt von R. Zsigmondy in der Sitzung vom 1. August 1924.

Bei der Untersuchung des Mechanismus der Katalyse in mikroheterogenen Systemen beginnt man zweckmäßig mit dem Studium der einfachen Fälle. Diese sind die Reaktionen, die durch chemisch einfach zusammengesetzte Kolloide katalytisch beeinflußt werden. So kann man, von einfachen Verhältnissen ausgehend, unter allmähligem Übergang zu schwierigeren Fällen endlich zur Erklärung von verwickelten Vorgängen kommen, die durch Kolloide katalytisch beeinflußt werden und wichtige Teilvorgänge biochemischer Erscheinungen darstellen.

Unter dieser Einstellung haben wir Arbeiten durchgeführt, von denen ich einige jetzt hier vorlegen möchte. Und zwar möchte ich zunächst sprechen über einen einfachen Vorgang, über die Zersetzung des Wasserstoffsuperoxyds, wobei als Katalysator ein durch elektrische Zerstäubung dargestelltes Platinhydrosol diente.

Wenn man kolloide Katalysatoren behandelt, setzt man von vornherein voraus, daß ihre katalytische Wirksamkeit im Wesentlichen auf Eigenschaften zurückzuführen ist, die charakteristisch für Kolloide überhaupt sind. Es ist häufig ausgesprochen worden, daß Kolloide wegen ihrer besonderen Eigenschaften, infolge ihrer feinen Zerteilung und großen Oberfläche besonders katalytisch wirksam sind. Dabei wird als besonders charakteristische Eigenschaft echter Kolloidlösungen ihre Stabilität angesehen.

Wenn dies tatsächlich zutrifft, so müßten Einflüsse, welche die Stabilität des Kolloids vergrößern, auch seine katalytische Wirksamkeit verstärken oder mit andern Worten: geschützte Platin-

---

1) Übersetzung des Manuskripts zu dem vom Verfasser in einer öffentlichen Sitzung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen am 26. Juni 1924 gehaltenen Vortrag.

elektrosole müßten eine größere katalytische Wirksamkeit haben als nicht geschützte. Aber es trifft das Gegenteil zu. Wir kommen zu diesem Ergebnis, ganz gleichgültig, welche Schutzkolloide wir untersuchen, wie protalbinsaures und lysalbinsaures Natrium, Gummi arabicum oder Gelatine.

Die folgende Tabelle 1 betrifft ein mit Gelatine geschütztes, elektrisch dargestelltes Platinhydrosol, das zur Katalyse der Zersetzung von Wasserstoffsuperoxyd verwendet wurde.

Tabelle 1.

Zeit in Minuten	Prozente von zersetztem H_2O_2								
	Vergleichs-lösung	Gehalt an Gelatine in 100.000 C.C. Lösung							
		0,12	0,60	1,20	6,0	12,0	24	36	48
5	29,9	16,4	9,7	8,3	7,5	6,8	5,3	4,8	4,3
22	80,3	58,4	35,5	27,8	21,5	21,1	20,8	20,6	20,4
30	85,3	66,3	43,3	35,5	25,6	25,1	24,5	24,1	23,4
48	93,5	81,9	64,6	55,1	35,5	33,5	32,4	31,1	29,9
72	97,4	92,0	83,1	70,4	43,9	38,3	37,4	36,5	34,9
96	—	94,9	91,5	82,5	50,3	46,7	44,7	43,1	41,1
120	—	—	94,0	88,7	57,0	54,5	53,6	52,1	49,2
168	—	—	—	95,7	68,5	55,7	59,5	56,1	53,5

Aus diesen Untersuchungen geht hervor, daß bei kleinen Dosen des Schutzkolloids die katalytische Wirksamkeit des Präparats größer ist als bei größeren Mengen des Schutzstoffes. Dies kann man wohl darauf zurückführen, daß das Schutzkolloid die Oberfläche der Kolloidteilchen verringert und so ihre katalytische Wirksamkeit, soweit sie von der Oberfläche abhängt, herabsetzt. Andererseits nimmt durch die Stabilisierung mittels eines Schutzkolloids die Beständigkeit des Hydrosols stark zu. Die Feinteiligkeit und die daraus sich ergebenden Einflüsse, wie Diffusion und Brown'sche Bewegung, die der Katalyse förderlich sind, bleiben auch bei Gegenwart von Schutzkolloid gewahrt. Trotzdem also eine Reihe wirksamer physikalischer Faktoren, die den katalytischen Prozeß zu fördern imstande sind, bestehen bleiben, geht die katalytische Wirksamkeit des Hydrosols stark zurück. Es lag daher nahe, anzunehmen, daß neben physikalischen Eigenschaften, welche die Katalyse fördern, wie z. B. die Größe der Oberfläche, auch andere, vor allem

chemische Einflüsse für die katalytische Wirksamkeit der untersuchten Platinhydrosole maßgebend sind.

Die Bestimmung der chemischen Zusammensetzung der Kolloidteilchen bietet viele Schwierigkeiten. Denn die Kolloide sind oft auch im chemischen Sinne sehr instabile Gebilde. Die kolloide Mizelle ist auch ein chemisches Gebilde, in dem fortwährend Umwandlungen stattfinden können. Geringfügige Einflüsse können oft bereits die Zusammensetzung der Mizelle ändern, wodurch die chemische Untersuchung solcher kolloider Systeme erschwert wird.

Wir haben uns bemüht, auf diese Frage eine Antwort zu erhalten [1]), indem wir die Gase untersuchten, die während der elektrischen Zerstäubung des Platins frei werden. Wir benutzten als Dispersionsmittel reines doppelt destilliertes Wasser und sehr reines Platin. Beim Überspringen des Funkens unter Wasser entwickelten sich Gasblasen, die wir in einem graduierten Eudiometer auffingen. Diese Gase entstammen der Zersetzung des Wassers durch den Funken, und wenn sie nicht zum Teil absorbiert würden, müßten sie die Zusammensetzung des Knallgases haben.

Nachdem die Zerstäubung zuende war, ließen wir den elektrischen Funken zwischen den Platindrähten überspringen, die das Eudiometer oben durchsetzen. Wir beobachteten keine merkliche Änderung des Volumens. Es sind also Wasserstoff und Sauerstoff nicht im nötigen Verhältnis, um Wasser zu bilden, vorhanden. Auch bei weiteren Versuchen ergab das aufgefangene Gas kein Wasser. Die Gasanalyse ergab sowohl bei Behandlung mit Phosphor als auch nach dem Mischen mit Wasserstoff bei der Untersuchung in der Explosionspipette keinen Gehalt an Sauerstoff. Wurde das Gas jedoch mit Sauerstoff gemischt und in der Explosionspipette untersucht, so zeigte sich eine beträchtliche Volumenverminderung, also Wasserbildung. Die Wiederholung dieses Versuches mit passenden Mengen Sauerstoff ergab, daß das aufgefangene Gas Wasserstoff war. Der dazu gehörige Sauerstoff wurde von den Platinteilchen aufgenommen. Dieses Resultat wollten wir auch unmittelbar analytisch bestätigen. Wir sammelten zu diesem Zweck eine genügende Menge von koaguliertem Platinelektrosol. Dieses trockneten wir bei gewöhnlicher Temperatur und brachten es in ein Glas, das mit einem Azotometer zum Auffangen der Gase verbunden war. Der Apparat ist prinzipiell so gebaut, wie die zur Bestimmung des Stickstoffs organischer Substanzen verwendete Anordnung nach Dumas.

1) Rev. de la Real Academ. de Ciencias de Madrid. Enero de 1920.

Beim kräftigen Erhitzen des koagulierten Platins entwickelten sich kleine Blasen eines Gases, das sich als Sauerstoff herausstellte. Diese Methode der Untersuchung ist sehr schwierig; wir benutzten deshalb im Wesentlichen die oben genannte synthetische Methode, die uns genauere Resultate zu geben schien. Kürzlich hat Dr. Thießen eine sehr vollendete Mikromethode beschrieben, mit der er die chemische Zusammensetzung der Ultramikronen kolloider Goldlösungen untersuchte.

Die Mizelle der Platinelektrosole ist also zusammengesetzt aus Platin und Platinoxyd. Wir nehmen an, daß sie gebildet ist aus einem Anteil von massivem Platin mit kristalliner Struktur, das von der Kathode durch die elektrische Zerstäubung losgerissen wurde. Dieser massive Anteil ist umgeben von einer Schicht eines Platinoxydes, das sich an der Metalloberfläche bildete unter dem Einfluß des Sauerstoffs, den die Wasserzersetzung durch den elektrischen Funken lieferte. An diese Hülle von Platinoxyd werden durch Adsorption Hydroxylionen aus dem Wasser gebunden; diese bestimmen die negative elektrische Ladung der Mizellen in den Platinelektrosolen.

Auf Grund dieser experimentell gestützten Vorstellungen nehmen wir an, daß der katalytische Einfluß von Platinelektrosolen auf die Zersetzung des Wasserstoffsuperoxyds in der Zsigmondyschen Schreibweise durch folgende Gleichungen ausgedrückt werden kann, wobei im Anschluß an Lothar Wöhler[1]) PtO_3 als wirksames Oxyd vorausgesetzt ist:

$$\boxed{Pt}\,^{2)}\, PtO_3 + H_2O_2 = \boxed{Pt}\, PtO_2 + H_2O + O_2$$

$$\boxed{Pt}\, PtO_2 + {}^1/_2\, O_2 = \boxed{Pt}\, PtO_3$$

Als Bestätigung für unsere Anschauungen dient uns eine reiche Fülle von experimentellem Material, das ich in großen Zügen darlegen möchte. Wir sind sicher, daß die katalytische Fähigkeit des Platinelektrosols bei der von uns untersuchten Reaktion nicht dem Platin, sondern dem Oxydgehalt der Mizelle zugeschrieben werden muß. Es zeigte sich nämlich, daß in den Platinhydrosolen die katalytische Wirksamkeit weitgehend abhing von der bei der Zerstäubung aufgenommenen Sauerstoffmenge. Einem größeren

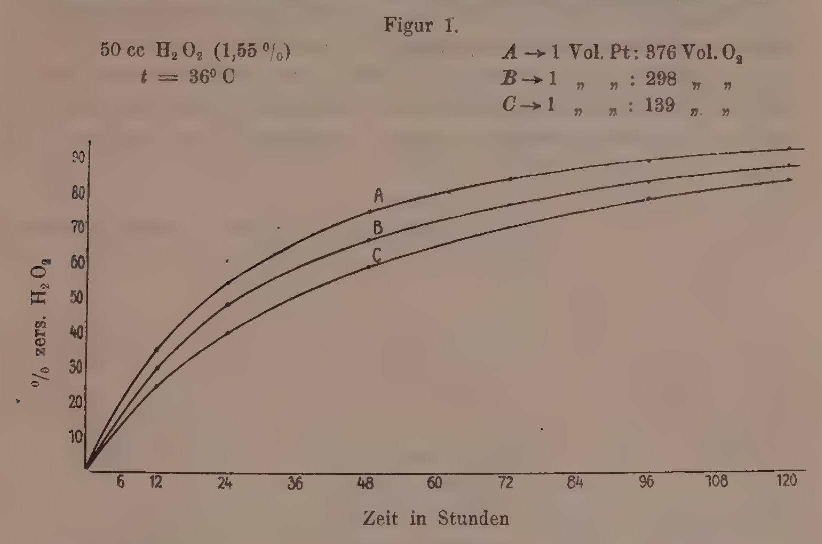
---

1) L. Wöhler: Zeitschr. f. Elektrochemie 1909, 769 bis 773.

2) Der umrahmte Teil stellt ein ultramikroskopisches Teilchen dar, an dessen Oberfläche sich das wirksame Oxyd befindet. Das Symbol sagt über Menge und Anordnung der die Mizelle bildenden Körper nichts aus. (Vgl. Zsigmondy, Kolloidchemie 3. Aufl. Kap. 33.)

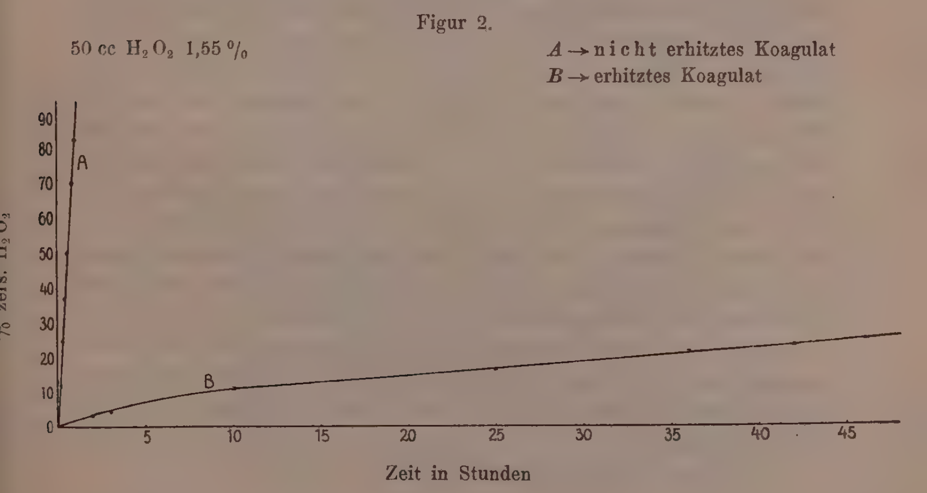
Volumen aufgenommenen Sauerstoff entspricht eine stärkere Fähigkeit, Wasserstoffsuperoxyd katalytisch zu zersetzen (vgl. Fig. 1).

Figur 1.



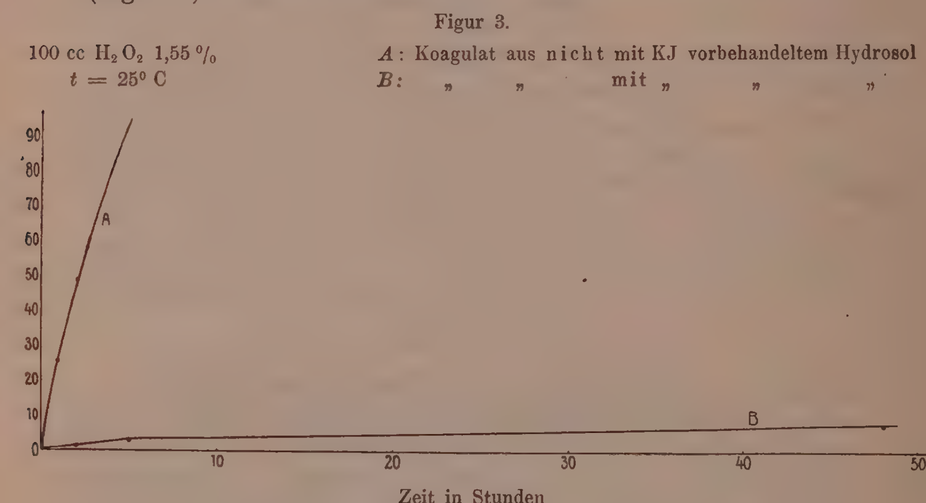
Zum weiteren Beweis erhitzten wir Koagulate aus Platinelektrosolen, die stets katalytisch wirksam waren bis zur dunklen Rotglut. Dabei wurde das Oxyd zerstört. Wurden die so vorbehandelten Koagulate nachher in Wasser suspendiert, so wirkten sie kaum mehr katalytisch (Fig. 2). Durch die Zerstörung des Oxyds war auch die Fähigkeit zur Katalyse geschwunden.

Figur 2.



Auf andere Weise gelangten wir zu den gleichen Resultaten. In schwefelsaurer Lösung zersetzen die Platinelektrosole Lösungen von Jodkalium und machen Jod frei. Wird diese Reaktion durchgeführt und der Niederschlag mehrfach gewaschen, so wirkt der Rückstand nicht mehr katalytisch. Wird aber ein Platinelektrosol zum Vergleich unter Weglassen des Jodkaliums genau so behandelt, wie es eben beschrieben wurde, so wirkt es doch katalytisch. (Figur 3.)

Figur 3.



Wenn aber der Sauerstoff der aktive Stoff des untersuchten kolloidalen Katalysators ist, so müßte dessen katalytische Kraft dem Sauerstoffgehalt der Mizelle entsprechen. Dies trifft in der Tat zu. Wenn Versuchsbedingungen, die Temperatur, Stromstärke, Elektrodenabstand, Häufigkeit des Funken etc. geändert wurden, fingen wir beim Zerstäuben gleicher Platinmengen verschieden große Gasmengen auf. Dabei entspricht eine größere vom Platin aufgenommene Sauerstoffmenge einem größeren Volumen aufgefangenen Wasserstoffs. Wir fanden tatsächlich, daß einer größeren vom Platin aufgenommenen Sauerstoffmenge eine größere katalytische Beschleunigung der Reaktion entsprach. Allerdings ist die Beschleunigung der Reaktion nicht streng proportional dem Sauerstoffgehalt des Katalysators. Es liegt nahe, anzunehmen, daß einige andere Ursachen, z. B. Ionenkonzentration, physikalische Einflüsse etc. die katalytische Wirksamkeit der Mizelle verändern.

Als Beispiel dafür diene die folgende Tabelle.

Tabelle 2.

Gewicht des zerstäubten Platins	Verhältnis der Volumina Pt : 0	Prozente von zersetztem H_2O_2			
		24 Stunden	48 Stunden	72 Stunden	120 Stunden
0,0284 g	1 : 378	55,87	75,77	85,29	95,38
0,0351 „	1 : 306	52,30	70,44	81,00	90,85
0,0375 „	1 : 286	48,31	66,80	78,57	90,36
0,0527 „	1 : 204	44,95	64,68	74,09	87,83
0,0772 „	1 : 139	41,09	60,08	72,13	86,26

Diese Anschauung mit ihrer experimentellen Begründung veröffentlichte ich im April 1920 in der „Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid“. Seither habe ich diese Resultate noch durch neue Beobachtungen gestützt, über die ich nun berichten möchte.

Den Gehalt an aktivem Sauerstoff der Platinelektrosole bestimmte ich, indem ich die Menge Jods, die aus einer schwefelsauren eingestellten Jodkaliumlösung durch das Platinelektrosol freigemacht wurde, mit Natrium-Thiosulfat titrierte. Auf diese Weise fand ich die Menge des aktiven Sauerstoffs. Ferner verglich ich die so untersuchten Platinelektrosole hinsichtlich der katalytischen Beschleunigung, die sie bewirken, und fand, daß einem größeren Sauerstoffgehalt eine größere Reaktionsgeschwindigkeit entspricht. Vgl. die folgende Tabelle 3.

Tabelle 3.

Elektroplatinsol (a) und (b) von der Konzentration 0,002 % Pt.
desgl. (c) und (d) desgl. 0,0019 desgl.

Zeit in Minuten	Prozente von zersetztem H_2O_2 cc Sauerstoff auf 1 mg Platin			
	0,0238 (a)	0,0278 (b)	0,036 (c)	0,033 (d)
15	14,8	20,2	22,5	20,2
30	26,8	34,4	44,8	36,8
45	37,2	46,5	58,2	48,3
60	45,4	55,1	68,7	56,8
75	53,2	62,3	—	—
210	85,9	91,2	—	—
225	—	—	97,3	94,0
270	89,4	94,4	—	—

Eine interessante Beobachtung haben wir gemacht, als wir die Resultate dieser Methode der Sauerstoffbestimmung durch Zersetzung von Jodkalium verglichen mit den Zahlen, die sich ergaben, wenn wir die Menge des aufgenommenen Sauerstoffs in der vorher angegebenen Weise bei der Zerstäubung maßen. Es zeigte sich nämlich, daß die Menge des nach der chemischen Methode gefundenen Sauerstoffs immer annähernd die Hälfte des Sauerstoffs war, den wir bei der Zerstäubung fanden. Wir legten diesen Befund dahin aus, daß die Platinpartikeln sich mit dem Sauerstoff in zwei verschiedenen Formen verbanden, von denen nur eine imstande ist, Kaliumjodid zu zersetzen.

Wenn die Platinelektrosole ihre katalytische Wirksamkeit dem Sauerstoff verdanken, so dürften sie diese erst bei Temperaturen verlieren, bei denen die Platinoxyde zerstört werden. Da die Temperatur von 100° weit entfernt ist, muß sich ergeben, daß nach dem Erwärmen des Elektosols seine katalytische Fähigkeit weder abnimmt, noch auch nur im geringsten zurückgeht. Tatsächlich nahm die katalytische Beschleunigung der Zersetzung von Wasserstoffsuperoxyd entsprechend der Temperatur zu, wenn wir bei bis 100° steigenden Temperaturen arbeiteten. Wir haben viele Versuche unternommen, um die dargelegten Gedankengänge zu bestätigen. Stets hatten sie ein positives Ergebnis. Die folgende Tabelle 4 bringt einige dieser Resultate.

Tabelle 4.

Änderungen der katalytischen Wirksamkeit in siedenden Platinelektrosolen.

A: Elektroplatinsol alt
B: desgl. und gekocht
C: „ frisch bereitet
D: „ „ „ und gekocht.

In allen Fällen 100 cc H_2O_2 (1,5 %) und 10 cc Elektroplatinsol (0,002 %).

Zeit in Minuten	Prozente von zersetztem H_2O_2			
	A	*B*	*C*	*D*
30	11,1	16,3	15,7	20,2
90	28,3	32,4	39,2	47,1
300	60,5	60,0	84,9	89,6

Überlegungen haben zu dem Ergebnis geführt, daß bei wachsenden Konzentrationen an Hydroxylionen die Zersetzung des Wasserstoffsuperoxyds zunehmen wird.

Verschiedene Versuche haben dies bestätigt. Wir verfolgten dazu durch manganometrische Bestimmungen den Fortschritt der Zersetzung des Wasserstoffsuperoxyds in Medien mit verschiedenen Konzentrationen an Hydroxylionen. Die Resultate einiger Bestimmungen gibt die folgende Tabelle.

Tabelle 5.

cc einer Lösung von Na OH 0,0374 n.

Zeit in Minuten	Vergleichslösung		1 cc		3 cc		5 cc		10 cc		15 cc	
	$\%\ H_2O_2$	K	$\%\ H_2O_2$	K	$\%\ H_2O_2$	K	%	K	%	K	%	K
		—		—		459		604		828		1350
20	6,5	—	—	—	8,8	—	11,4	—	15,3	—	23,7	
		481		477		622		953		1430		1606
40	15,1	—	17,4	—	19,5	—	26,8	—	36,4	—	44,7	—
		284		396		736		1170		1761		2355
60	19,8	—	23,7	—	30,4	—	42,1	—	55,4	—	65,5	
		334		275		850		1450		2413		3303
80	25,0	—	27,8	—	41,3	—	56,7	—	72,5	—	82,2	
		245		336		973		1604		2766		4183
100	28,6	—	32,5	—	51,7	—	68,6	—	84,2	—	92,3	
		246		294		—		—		—		—
360	62,4	—	68,6	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Das Zeichen % gibt die Prozente des zersetzten H_2O_2 an: die Werte für K sind multipliziert mit 10^5.

Zur Berechnung des Koeffizienten K der Reaktionsgeschwindigkeit haben wir wie Bredig die Formel für monomolekulare Reaktion angewandt. Wir erhielten jedoch veränderliche Werte für K, die uns eine Vorstellung gaben von den Veränderungen der Geschwindigkeiten der Reaktion. Wir beobachteten, daß von einer bestimmten Konzentration der Hydroxylionen an im Verlauf der Reaktion die Werte für K fortschreitend zunehmen. Wenn nun der an Platin gebundene Sauerstoff das treibende Moment der betrachteten katalytischen Reaktion ist, so zeigen diese Änderungen der Geschwindigkeit an, daß der Sauerstoffgehalt der kolloiden Partikeln des Katalysators zunimmt.

Um diese Folgerung experimentell zu bestätigen, fügten wir zu Wasserstoffperoxyd eine hinreichende Menge des Katalysators und bestimmten dann den Gehalt an Sauerstoff im Platinsol in

der eben mitgeteilten Weise jodometrisch. Es zeigte sich dabei, daß ein Katalysator, der in alkalischer Lösung gearbeitet hatte, also eine höhere Reaktionsgeschwindigkeit bewirkt hatte, mehr Sauerstoff enthielt, als ein Platinelektrosol, das ohne Alkali Wasserstoffperoxyd zersetzt hatte. Die Resultate drückt die folgende Tabelle 6 aus:

Tabelle 6.

Das Platinsol enthielt 0,002 gr in 100 gr Sol.

Versuch	Sauerstoffgehalt des Platinelektrosols, das in neutralem Medium wirkte	Sauerstoffgehalt des Platinelektrosols, das in alkalischem Medium wirkte, nach dem Versuch
1.	0,0492 cc	0,0594 cc
2.	0,0672 „	0,1118 „

Dieses experimentelle Ergebnis ist also in Übereinstimmung mit den Folgerungen aus unseren Anschauungen.

Wenn bei der von uns betrachteten katalytischen Reaktion nun das Wasserstoffperoxyd allein sich zersetzt, so würde das eine monomolekulare Reaktion (Reaktion ersten Grades) sein. Dann müßten aber die Werte für den Koeffizienten K der Reaktionsgeschwindigkeit, berechnet nach der Formel

$$K \cdot 0{,}4343 = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \log \frac{a - x_1}{a - x_2}$$

annähernd gleich sein. Wir fanden aber, daß in allen von uns untersuchten Fällen, z. B. auch in dem in der vorigen Tabelle 6 dargestellten Falle, die Werte für K stark schwankten; demnach ist die genannte Reaktion nicht einfach ersten Grades.

Wir beobachteten auch, daß die Werte für K wachsen mit abnehmender Konzentration des Wasserstoffperoxyds. Auch dieses deutet daraufhin, daß die Reaktion nicht einfach monomolekular ist. Wir führten dazu einige vergleichende Versuche aus, indem wir während einer bestimmten gleichen Zeit, bei der gleichen Temperatur von 25° Platinelektrosol auf Lösungen von Wasser und Perhydrol mit verschiedenem Gehalt an Wasserstoffperoxyd einwirken ließen.

Die Resultate eines dieser Versuche sind in folgender Tabelle 7 angeführt:

Tabelle 7.

Zeit in Minuten	Vorhandenes H_2O_2 in Prozenten							
	4,2		3		1,8		0,6	
	%	K	%	K	%	K	%	K
15	2,5	—	1,6	—	2,1	—	3,2	
		552		964		1286		1518
45	4,1	—	4,4	—	5,8	—	7,5	
		564		1050		1015		1778
90	6,5	—	8,8	—	10,0	—	14,6	
		823		825		856		966
150	11,0	—	13,2	—	14,5	—	19,4	
		506		495		866		1396
300	17,5	—	19,4	—	24,9	—	34,6	
		214		317		492		885
1230	32,4	—	40,0	—	52,5	—	71,3	

Das Zeichen % gibt die Prozente von zersetztem H_2O_2 an.
Die Werte für K sind multipliziert mit 10^6.

Wenn wir in nahezu neutraler Lösung arbeiten, nehmen die Werte für K allmählich ab im Verlaufe der Reaktion. In alkalischer Lösung aber nehmen sie allmählich zu. Demnach gibt es also eine Konzentration an Hydroxylionen, bei der die Werte für K konstant bleiben. Dies läßt sich erklären unter der Annahme, daß in diesem Falle gerade der Gehalt an Sauerstoff des Katalysators unverändert bleibt. Im Allgemeinen haben wir ja nachgewiesen, daß bei wachsender Alkalität der Lösung der Sauerstoffgehalt des Katalysators im Verlauf der Reaktion steigt, während er bei geringerer Alkalität abnimmt. Es ist also sehr wohl eine Alkalikonzentration möglich, bei der im Verlauf der Reaktion der Gehalt an Sauerstoff im Katalysator unverändert bleibt.

Zusammenfassend ergibt sich also, daß die Mizelle der katalytisch wirksamen Platinelektrosole aus metallischem Platin besteht, das umgeben ist von einer oxydartigen Platinverbindung, vielleicht vom Typus der Peroxyde.

In dem System Platin-Sauerstoff schwankt der Gehalt an Sauerstoff. Diese Veränderungen sind auf sehr verschiedene Gründe zurückzuführen, von denen wir einige nannten. In diesen Schwan-

kungen liegt die Schwierigkeit bei der Untersuchung der katalytischen Wirksamkeit solcher Systeme.

Wir stellten fest, daß Platinelektrosole, die unter gänzlich gleichen Bedingungen hergestellt waren, — wobei nur das verwendete Wasser eine verschiedene elektrische Leitfähigkeit aufwies —, dennoch immer katalytisch verschieden wirksam waren. Einem Wasser von geringerer Leitfähigkeit oder einem anderen von geringerer Konzentration an Hydroxylionen entsprach ein Elektrosol von geringerer katalytischer Wirksamkeit.

Alle diese Untersuchungen zeigen, daß sich die hier betrachteten katalytischen Erscheinungen vom chemischen Standpunkte aus erklären lassen. Es scheint daraus hervorzugehen, daß die chemische Wirksamkeit kleinster Teilchen diese überaus interessanten Erscheinungen bedingt, die in der Biochemie, im Laboratorium und der Industrie immer steigende Bedeutung gewinnen.

Über Körper von algebraischen Funktionen mehrerer Variablen.

Von

Werner Schmeidler in Breslau.

Vorgelegt von E. Landau in der Sitzung vom 21. November 1924.

Wir betrachten solche Körper, die in zwei oder mehrere Körper von algebraischen Funktionen einer Variablen als „Faktoren" direkt zerlegbar sind, wobei als Grundbereich P alle komplexen Zahlen zugelassen sind. Ein solcher Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 \times \cdots \times \mathfrak{K}_n$ enthält also alle rationalen Funktionen von $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots, x_n, y_n$, wobei $\mathfrak{K}_i = \{x_i, y_i\}$ alle rationalen Funktionen von x_i und y_i umfaßt, und y_i eine algebraische Funktion von x_i ist, die etwa durch die in $\mathsf{P}(x_i)$ irreduzible Gleichung $F_i(x_i, y_i) = 0$ definiert ist $(i = 1, \ldots, n)$. Die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ selbst sind algebraisch unabhängig, ihre Anzahl ergibt den „Transzendenzgrad" von $\mathfrak{K}$ über P nach der Terminologie von Steinitz in seiner bekannten Körperarbeit im Crelle'schen Journal, Bd. 137.

Es handelt sich um die Frage: *Ist diese Zerlegung von $\mathfrak{K}$ in die Faktoren $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ eindeutig, oder gibt es andere Darstellungen desselben Körpers $\mathfrak{K}$ in der Form $\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \cdots \times \mathfrak{L}_m$? Und wenn ja, ist dann stets $m = n$ und bei passender Reihenfolge $\mathfrak{K}_1$ isomorph $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ isomorph $\mathfrak{L}_n$?* Da die Frage der Anzahlgleichheit ohne weiteres zu bejahen ist, wenn die Körper $\mathfrak{L}$, was hier nur gemeint ist, ebenfalls algebraische Körper je einer Variablen sein sollen, da ferner triviale mehrfache Zerlegungen in Beispielen leicht angebbar sind, so handelt es sich nur noch um die Frage der Isomorphie. *Diese kann nicht allgemein bejaht werden.* Die genaue Antwort liefert vielmehr der folgende

Satz: *Bei passender Bezeichnung ist stets $\mathfrak{K}_i$ homöomorph $\mathfrak{L}_i$ (d. h. $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{L}_i$ sind je zu einem Teilkörper des anderen isomorph). Ist das Geschlecht p_i von $\mathfrak{K}_i$ gleich 0 oder > 1, so folgt aus der Homöomorphie die Isomorphie, dagegen nicht für $p_i = 1$. Es gibt einen Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$, dessen Faktoren vom Geschlechte 1 und paarweise homöomorph, aber nicht isomorph sind.*

Zum Beweise des ersten Teiles dieses Satzes verfahren wir ähnlich wie in meiner Arbeit Über die Zerlegung von Primgruppen (Mathematische Annalen, Bd. 91, S. 47—59) zum Beweise des dortigen Satzes 7. Wir definieren als $\mathfrak{K}_1$-Komponente einer Funktion $F(x_1, y_1; \ldots, x_n, y_n)$ von $\mathfrak{K}$ inbezug auf die Nullstelle $\alpha_2, \beta_2; \ldots, \alpha_n, \beta_n$ die Funktion $F(x_1, y_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots, \alpha_n, \beta_n)$; dabei ist $F_2(\alpha_2, \beta_2) = 0, \ldots, F_n(\alpha_n, \beta_n) = 0$, und die (sonst beliebigen) endlichen Werte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind nur so zu wählen, daß $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sowie die Koeffizienten von F als Funktion von x_1, y_1, die selbst algebraische Funktionen von $x_2, \ldots, x_n$ sind, ebenfalls endlich werden; dazu sind nur endlich viele Werte der α zu vermeiden[1]). Wir verfahren analog bei der Definition der $\mathfrak{K}_2$- bis $\mathfrak{K}_n$-Komponenten von F.

Besteht zwischen mehreren Größen $F, G, H, \ldots$ von $\mathfrak{K}$ eine ganze rationale Beziehung, so besteht dieselbe Beziehung auch zwischen den $\mathfrak{K}_1$-Komponenten dieser Größen, wobei wiederum für die zu benutzenden Nullstellen nur endlich viele Werte der α zu vermeiden sind; denn die linke Seite jeder Relation $J = 0$ zwischen den Variablen $x_1, y_1; \ldots, x_n, y_n$ kann auf die Form $J = A_1 F_1 + \cdots + A_n F_n$ mit Koeffizienten $A_1, \ldots, A_n$ gebracht werden, die rational in den Variablen sind. Analoges gilt bezüglich der $\mathfrak{K}_2$- bis $\mathfrak{K}_n$-Komponenten der Größen $F, G, H, \ldots$.

Es sei nun $\mathfrak{L}_i = \{z_i, t_i\}$, wobei t_i eine algebraische Funktion von z_i ist; dann ist bei unsern Annahmen

$$(1)\quad \begin{aligned} x_i &= h_i(z_1, t_1; \ldots, z_n, t_n), & y_i &= k_i(z_1, t_1; \ldots, z_n, t_n) \\ z_i &= f_i(x_1, y_1; \ldots, x_n, y_n), & t_i &= g_i(x_1, y_1; \ldots, x_n, y_n) \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit rationalen Funktionen f_i, g_i, h_i, k_i. Wird $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ so gewählt, daß $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sowie die zugehörigen Wertsystene $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ der z und $\delta_1, \ldots, \delta_n$ der t sämtlich endlich sind, was mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Systemen der α stets eintritt, so können wir folgenden Hilfssatz aussprechen (vgl. Satz 6 meiner obigen Arbeit):

Hilfssatz: *Es gibt zu jedem $\mathfrak{K}_i$ ein $\mathfrak{L}_j$ derart, daß die $\mathfrak{L}_j$-Komponenten der Funktionen von $\mathfrak{K}_i$ inbezug auf die Nullstelle*

$$(\gamma_1, \delta_1; \ldots, \gamma_{j-1}, \delta_{j-1}; \gamma_{j+1}, \delta_{j+1}; \ldots, \gamma_n, \delta_n)$$

nicht sämtlich konstant sind, ja daß sogar die $\mathfrak{K}_i$-Komponenten dieser $\mathfrak{L}_j$-Komponenten inbezug auf die Nullstelle

$$(\alpha_1, \beta_1; \ldots, \alpha_{i-1}, \beta_{i-1}; \alpha_{i+1}, \beta_{i+1}; \ldots, \alpha_n, \beta_n)$$

nicht sämtlich konstant sind. Dies gilt für geeignet gewählte Werte von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

1) Die systematische Mitbenutzung der Stelle ∞ im Sinne der Funktionentheorie ist für die vorliegenden Zwecke nicht erforderlich.

Um diesen Hilfssatz zu beweisen, nehmen wir $i = 1$ an und betrachten die folgenden rationalen Funktionen der unabhängigen Variablen u_1, v_1 mit Koeffizienten in $\mathfrak{K}$:

$$(2) \quad \begin{cases} G_j(u_1, v_1) = h_1(z_1, t_1; \ldots z_{j-1}, t_{j-1}; f_j(u_1, v_1; x_2, y_2; \ldots x_n, y_n), \\ \qquad\qquad g_j(u_1, v_1; x_2, y_2; \ldots x_n, y_n); \ldots z_n, t_n) \\ H_j(u_1, v_1) = k_1(z_1, t_1; \ldots z_{j-1}, t_{j-1}; f_j(u_1, v_1; x_2, y_2; \ldots x_n, y_n), \\ \qquad\qquad g_j(u_1, v_1; x_2, y_2; \ldots x_n, y_n); \ldots z_n, t_n). \end{cases}$$

Unterwerfen wir u_1, v_1 der Bedingung $F_1(u_1, v_1) = 0$, so behaupten wir, daß die entstehenden algebraischen Funktionen G_j und H_j nicht beide in $\mathfrak{K}$ enthalten sein können. Mit dieser Behauptung ist der Hilfssatz bewiesen; denn ist dies gezeigt, so folgt, daß bei geeigneter Wahl von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Funktionen

$$(3) \quad \begin{cases} h_1(\gamma_1, \delta_1; \ldots, \gamma_{j-1}, \delta_{j-1}; f_j(u_1, v_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots \alpha_n, \beta_n), \\ \qquad\qquad g_j(u_1, v_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots \alpha_n, \beta_n); \ldots \gamma_n, \delta_n) \\ k_1(\gamma_1, \delta_1; \ldots, \gamma_{j-1}, \delta_{j-1}; f_j(u_1, v_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots \alpha_n, \beta_n), \\ \qquad\qquad g_j(u_1, v_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots \alpha_n, \beta_n); \ldots \gamma_n, \delta_n) \end{cases}$$

von u_1, v_1 nicht beide konstant sind; alsdann sind aber auch die Funktionen

$$h_j(\gamma_1, \delta_1; \ldots, z_j, t_j; \ldots \gamma_n, \delta_n)$$
$$k_j(\gamma_1, \delta_1; \ldots, z_j, t_j; \ldots \gamma_n, \delta_n)$$

von z_j, t_j nicht beide konstant. Letztere sind aber die $\mathfrak{L}_j$-Komponenten von x_1, y_1, und die Funktionen (3) sind, wenn darin $u_1 = x_1$, $v_1 = y_1$ gesetzt wird, deren $\mathfrak{K}_1$-Komponenten. Analog verfahren wir für $i = 2, \ldots, n$; es gibt eine Wahl von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, die sämtlichen erforderlichen Bedingungen gleichzeitig genügt, und der Hilfssatz ist damit dann bewiesen.

Zum Beweise unserer Behauptung bezüglich der Funktionen (2) nehmen wir an, beide wären in $\mathfrak{K}$ enthalten; dann wäre identisch in u_1, v_1:

$$(4) \quad \begin{aligned} G_j(u_1, v_1) &= C_j + P_j(u_1, v_1) \\ H_j(u_1, v_1) &= D_j + Q_j(u_1, v_1), \end{aligned}$$

wo C_j und D_j Funktionen in $\mathfrak{K}$ und P_j und Q_j rationale Funktionen von u_1, v_1 mit Koeffizienten in $\mathfrak{K}$ sind, die beide mit $F_1(u_1, v_1)$ verschwinden. Aus (4) folgt für $P = \sum_{j=1}^{n} P_j$, $Q = \sum_{j=1}^{n} Q_j$:

$$(5) \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G_j}{\partial u_1} = \frac{\partial P}{\partial u_1}, \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G_j}{\partial v_1} = \frac{\partial P}{\partial v_1}$$

und die analogen Gleichungen für H_j.

Andererseits ist wegen (1) identisch in u_1, v_1:

$$h_1(f_1(u_1, v_1; \ldots x_n, y_n), g_1(u_1, v_1; \ldots x_n, y_n); \ldots f_n(u_1, v_1; \ldots x_n, y_n), g_n(u_1, v_1; \ldots x_n, y_n)) = u_1 + P$$
$$k_1(f_1(u_1, v_1; \ldots x_n, y_n), g_1(u_1, v_1; \ldots x_n, y_n); \ldots f_n(u_1, v_1; \ldots x_n, y_n), g_n(u_1, v_1; \ldots x_n, y_n)) = v_1 + Q,$$

wo P und Q mit $F_1(u_1, v_1)$ verschwinden. Dies liefert durch Differentiation

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial h_1}{\partial f_j}\frac{\partial f_j}{\partial u_1}+\frac{\partial h_1}{\partial g_j}\frac{\partial g_j}{\partial u_1}\right) = 1+\frac{\partial \bar{P}}{\partial u_1}, \\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial h_1}{\partial f_j}\frac{\partial f_j}{\partial v_1}+\frac{\partial h_1}{\partial g_j}\frac{\partial g_j}{\partial v_1}\right) = \frac{\partial \bar{P}}{\partial v_1} \end{cases}$$

und zwei analoge Gleichungen. Alle 4 Gleichungen gelten natürlich auch für $u_1 = x_1$, $v_1 = y_1$. Denken wir uns nun in (2) für z und t die Funktionen (1) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{\partial G_j}{\partial u_1} = \frac{\partial h_1}{\partial f_j}\frac{\partial f_j}{\partial u_1}+\frac{\partial h_1}{\partial g_j}\frac{\partial g_j}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial G_j}{\partial v_1} = \frac{\partial k_1}{\partial f_j}\frac{\partial f_j}{\partial v_1}+\frac{\partial k_1}{\partial g_j}\frac{\partial g_j}{\partial v_1},$$

und analoge Gleichungen für $\frac{\partial H_j}{\partial u_1}$, $\frac{\partial H_j}{\partial v_1}$. In die Funktionen $\frac{\partial h_1}{\partial f_j}$, $\frac{\partial h_1}{\partial g_j}$, $\frac{\partial k_1}{\partial f_j}$, $\frac{\partial k_1}{\partial g_j}$ sind dabei die Argumente von (2) eingesetzt zu denken. Summiert man dies über $j = 1, \ldots, n$ und setzt nachträglich $u_1 = x_1$, $v_1 = y_1$ ein, so ergibt die rechte Seite dasselbe, was links in (6) nach derselben Substitution steht, also wohlbestimmte endliche Funktionen von $\mathfrak{K}$; wir erhalten wegen (5)

$$(7)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial u_1}\right) = \left(1+\frac{\partial \bar{P}}{\partial u_1}\right), & \left(\frac{\partial P}{\partial v_1}\right) = \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial v_1}\right) \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial u_1}\right) = \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial u_1}\right), & \left(\frac{\partial Q}{\partial v_1}\right) = \left(1+\frac{\partial \bar{Q}}{\partial v_1}\right), \end{cases}$$

wobei die Klammern andeuten sollen, daß in den Funktionen der u, v, x und y die Variable $u_1 = x_1$, $v_1 = y_1$ einzusetzen ist. Bezeichnen wir $P - \bar{P}$ mit $\bar{\bar{P}}$, $Q - \bar{Q}$ mit $\bar{\bar{Q}}$, so verschwinden $\bar{\bar{P}}$ und $\bar{\bar{Q}}$ mit $F_1(u_1, v_1)$, es gilt also, da $F_1(u_1, v_1)$ in $\mathfrak{K}$ irreduzibel ist, mit rationalen A und B in u_1, v_1:

$$\bar{\bar{P}}(u_1, v_1) = A(u_1, v_1) \, . \, F(u_1, v_1)$$
$$\bar{\bar{Q}}(u_1, v_1) = B(u_1, v_1) \, . \, F(u_1, v_1)$$

wobei A und B ebenso wie $\bar{\bar{P}}$ und $\bar{\bar{Q}}$ Koeffizienten in $\mathfrak{K}$ haben.

Hieraus folgt aber im Verein mit (7):

$$\left(\frac{\partial \overline{\overline{P}}}{\partial u_1}\right) = (A)\cdot\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1, \quad \left(\frac{\partial \overline{\overline{P}}}{\partial v_1}\right) = (A)\cdot\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \overline{\overline{Q}}}{\partial u_1}\right) = (B)\cdot\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial \overline{\overline{Q}}}{\partial v_1}\right) = (B)\cdot\frac{\partial F}{\partial y_1} = 1,$$

und diese Gleichungen sind widerspruchsvoll. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Seine Anwendung liefert nun den Beweis der Homöomorphie der Faktoren folgendermaßen:

Wir gehen von $\mathfrak{K}_1$ aus und betrachten daneben den Körper $\overline{\mathfrak{L}}_j = \{\overline{h}_1(z_j, t_j), \overline{k}_1(z_j, t_j)\}$; dabei sei

$$\overline{h}_1(z_j, t_j) = h_1(\gamma_1, \delta_1; \ldots z_j, t_j; \ldots \gamma_n, \delta_n)$$

und analog $\overline{k}_1(z_j, t_j)$. $\overline{\mathfrak{L}}_j$ ist ein Teilkörper von $\mathfrak{L}_j$. Nun folgt aus $F_1(x_1, y_1) = 0$ auch $\overline{F}_1(\overline{h}_1, \overline{k}_1) = 0$, und da nicht beide Funktionen $\overline{h}_1$ und $\overline{k}_1$ konstant sind, so ist $\overline{\mathfrak{L}}_j$ vom Transzendenzgrad 1 über P, also notwendig mit $\mathfrak{K}_1$ isomorph. Ebenso ist aber

$$\mathfrak{K}_1^* = \{f_1^*(x_1, y_1), g_1^*(x_1, y_1)\}$$

mit

$$f_1^* = h_1(\gamma_1, \delta_1; \ldots f_j(x_1, y_1; \ldots \alpha_n, \beta_n), g_j(x_1, y_1; \ldots \alpha_n, \beta_n); \ldots \gamma_n, \delta_n)$$

$$g_1^* = k_1(\gamma_1, \delta_1; \ldots f_j(x_1, y_1; \ldots \alpha_n, \beta_n), g_j(x_1, y_1; \ldots \alpha_n, \beta_n); \ldots \gamma_n, \delta_n)$$

ein Teilkörper von $\mathfrak{K}_1$ vom Transzendenzgrad 1 über P, und zugleich ein Teilkörper von $\overline{\mathfrak{K}}_1 = \{\overline{f}_j(x_1, y_1), \overline{g}_j(x_1, y_1)\}$ mit

$$\overline{f}_j(x_1, y_1) = f_j(x_1, y_1; \ldots \alpha_n, \beta_n)$$

$$\overline{g}_j(x_1, y_1) = g_j(x_1, y_1; \ldots \alpha_n, \beta_n).$$

Also ist auch $\overline{\mathfrak{K}}_1$ vom Transzendenzgrad 1 über P, und da zwischen $\overline{f}_j$ und $\overline{g}_j$ dieselbe irreduzible Gleichung gilt, wie zwischen z_j und t_j, so ist $\overline{\mathfrak{K}}_1$ mit $\mathfrak{L}_j$ isomorph. Bei passender Umnumerierung der Körper $\mathfrak{L}$ wird also $\mathfrak{K}_1$ mit $\mathfrak{L}_1$ homöomorph sein, und Analoges beweist man bezüglich der übrigen Körper $\mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$ und $\mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_n$.

Was nun die weiteren Behauptungen unseres Satzes betrifft, so beachten wir zunächst, daß homöomorphe Körper dasselbe Geschlecht haben; dies folgt z. B. aus der Definition des Geschlechtes mit Hilfe der Integrale erster Gattung, da hiernach ein Teilkörper nicht höheres Geschlecht haben kann als der ganze Körper. Es läßt sich daher für jedes Paar $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{L}_i$ von dem zugehörigen Geschlechte p_i sprechen. Ist nun $p_i = 0$, so sind $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{L}_i$ isomorph; denn beide Körper sind dann rational, und es ist der Inhalt des bekannten Lürothschen Satzes, daß ein rationaler

Körper mit allen seinen Teilkörpern über P (außer P selbst) isomorph ist (vgl. auch Steinitz, a. a. O., S. 302).

Ist $p_i > 1$, so bemerken wir, daß wegen der Homöomorphie von $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{L}_i$ jeder dieser beiden Körper zu einem seiner Teilkörper $\mathfrak{K}_i^*$ bezw. $\mathfrak{L}_i^*$ isomorph ist; denn die isomorphe Zuordnung von $\mathfrak{K}_i$ zu einem Teilkörper $\overline{\mathfrak{L}}_i$ von $\mathfrak{L}_i$ und die isomorphe Zuordnung von $\mathfrak{L}_i$ zu einem Teilkörper $\overline{\mathfrak{K}}_i$ von $\mathfrak{K}_i$ bedingt zusammengefaßt eine isomorphe Zuordnung von $\mathfrak{K}_i$ zu einem Teilkörper $\mathfrak{K}_i^*$ von $\overline{\mathfrak{K}}_i$, also von $\mathfrak{K}_i$, und Analoges gilt von $\mathfrak{L}_i$. Nun ist aber für $p_i > 1$ jeder isomorphe Teilkörper mit dem ganzen Körper identisch; dies besagt ein Satz von Weber (Crelle's Journal, Bd. 76, S. 345), der gewöhnlich so ausgesprochen wird, daß eine $(1, \alpha)$-Korrespondenz einer algebraischen Kurve (oder Riemannschen Fläche) auf sich selbst stets *wechselseitig* eindeutig, also eine birationale Korrespondenz ist. Jede isomorphe Zuordnung eines Körpers $\mathfrak{K} = \{x, y\}$ auf einen Teilkörper $\mathfrak{K}^* = \{f(x, y), g(x, y)\}$ bedeutet nämlich eine $(1, \alpha)$-Korrespondenz der betreffenden Kurve auf sich selbst; denn ist $F(x, y) = 0$ die irreduzible Gleichung zwischen x und y, und setzt man $z = f(x, y)$, $t = g(x, y)$, so ist auch $F(z, t) = 0$ wegen der Isomorphie, und jedem Punkte (x, y) entspricht ein Punkt (z, t), jedem Punkte (z, t) endlich viele Punkte (x, y), weil jedes Element des Körpers von einem (etwa z) algebraisch abhängt. Hiermit ist der Zusammenhang hergestellt; die Übereinstimmung von $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{K}_i^*$ bedeutet aber die Isomorphie von $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{L}_i$.

Es bleibt nun noch der Fall $p_i = 1$. Wir behaupten zunächst: *Es gibt für jeden Körper vom Geschlechte* 1 *isomorphe echte Teilkörper*, und wir wollen sie sämtlich aufstellen.

Zu diesem Zwecke bedenken wir, daß jeder Körper $\mathfrak{K} = \{x, y\}$ vom Geschlechte 1 bekanntlich bei passender Wahl der Erzeugenden durch die Weierstraßsche $\wp$-Funktion eines Parameters u mit geeignet gewählten Perioden ω_1, ω_2 und ihre Ableitung $\wp'$ nach u dargestellt werden, also $x = \wp(u \mid \omega_1, \omega_2)$, $y = \wp'(u \mid \omega_1, \omega_2)$ gesetzt werden kann. Irgend ein isomorpher Teilkörper $\mathfrak{K}^*$ vom Geschlechte 1 kann ebenso in der Form

$$\{z, t\} = \{\wp(v \mid \omega_1, \omega_2), \ \wp'(v \mid \omega_1, \omega_2)\}$$

dargestellt werden; u und v bedeuten dabei bekanntlich Integrale erster Gattung der beiden zu $\{x, y\}$ bezw. $\{z, t\}$ gehörigen Kurven. Nun hat Hurwitz in seiner bekannten Arbeit „Über algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip" (Mathematische Annalen, Bd. 28, S. 561—585) im ersten Para-

graphen die in Betracht kommenden Relationen zwischen den Integralen erster Gattung allgemein angegeben; in der dortigen Formel (1) auf S. 563 ist für unsern Fall $\alpha = 1$ und $p = 1$ zu setzen, und es ergibt sich, daß zwischen u und v eine Beziehung der Form

(8) $$v = mu + c$$

bestehen muß. Die Periodizität liefert für die Konstante m die Bedingungen:

$$m\omega_1 = a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2$$
$$m\omega_2 = a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$. *Demnach ist m ein (reeller oder komplexer) Multiplikator der Funktion $\wp(u\,|\,\omega_1, \omega_2)$.* Da umgekehrt jeder Multiplikator m einen isomorphen Teilkörper $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{K}$ liefert, insofern $\{\wp(mu\,|\,\omega_1, \omega_2), \wp'(mu\,|\,\omega_1, \omega_2)\} = \mathfrak{K}^*$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph ist, *so ist hiermit die Bestimmung aller isomorphen Teilkörper von $\mathfrak{K}$ auf die Bestimmung aller Multiplikatoren der zugehörigen $\wp$-Funktion zurückgeführt*, und damit unsere Behauptung, daß stets isomorphe echte Teilkörper existieren, bewiesen.

Wir behaupten nun weiterhin: *Es gibt für $p = 1$ homöomorphe Körper, die nicht isomorph sind.* Ein Beispiel sind die Körper $\mathfrak{K} = \{\wp(u\,|\,\omega_1, \omega_2), \wp'(u\,|\,\omega_1, \omega_2)\}$ und $\mathfrak{L} = \{\wp(2u\,|\,\omega_1, 2\omega_2), \wp'(2u\,|\,\omega_1, 2\omega_2)\}$, von denen $\mathfrak{L}$ ein Teilkörper von $\mathfrak{K}$ ist, da jede Funktion von $\mathfrak{L}$ die Perioden ω_1 und ω_2 gestattet. Anderseits ist

$$\mathfrak{K}^* = \{\wp(2u\,|\,\omega_1, \omega_2), \ \wp'(2u\,|\,\omega_1, \omega_2)\}$$

ein Teilkörper von $\mathfrak{L}$, da jede Funktion von $\mathfrak{K}^*$ die Ersetzung von $2u$ durch $2u + \omega_1$ und $2u + 2\omega_2$ gestattet. Ferner ist $\mathfrak{K}^*$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph, also sind $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ homöomorph. Dagegen haben die durch den Körper eindeutig bestimmten Invarianten g_2 und g_3, also die Koeffizienten der irreduziblen Gleichung, im Falle von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ verschiedene Werte, sodaß $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ nicht isomorph sein können.

Diese besonderen Umstände kommen nun auch im Falle des *Zerlegungsproblems* zur Geltung. Wir gehen aus von einem Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$, wobei $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{L}_i$ vom Geschlechte 1 sind, also in der Form

$$\mathfrak{K}_i = \{\wp(u_i\,|\,\omega_{i1}, \omega_{i2}), \ \wp'(u_i\,|\,\omega_{i1}, \omega_{i2})\}$$
$$\mathfrak{L}_i = \{\wp(v_i\,|\,\sigma_{i1}, \sigma_{i2}), \ \wp'(v_i\,|\,\sigma_{i1}, \sigma_{i2})\}$$

darstellbar sind. Ähnlich wie oben schließt man durch funktionentheoretische Überlegungen, daß die Beziehungen zwischen den

Parametern u_α und v_β linear sein müssen, also etwa

$$v_\alpha = \sum_\beta e_{\alpha\beta} u_\beta + e_\alpha; \quad u_\beta = \sum_\alpha \bar{e}_{\beta\alpha} v_\alpha + \bar{e}_\beta$$

gesetzt werden kann. Die Periodizität der Funktionen liefert für die Koeffizienten $e_{\alpha\beta}$ und $\bar{e}_{\beta\alpha}$ Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} e_{\alpha\lambda}\omega_{\lambda 1} &= a_{\alpha\lambda}\sigma_{\alpha 1} + b_{\alpha\lambda}\sigma_{\alpha 2}, & \bar{e}_{\alpha\lambda}\sigma_{\lambda 1} &= \bar{a}_{\alpha\lambda}\omega_{\alpha 1} + \bar{b}_{\alpha\lambda}\omega_{\alpha 2} \\ e_{\alpha\lambda}\omega_{\lambda 2} &= c_{\alpha\lambda}\sigma_{\alpha 1} + d_{\alpha\lambda}\sigma_{\alpha 2}, & \bar{e}_{\alpha\lambda}\sigma_{\lambda 2} &= \bar{c}_{\alpha\lambda}\omega_{\alpha 1} + \bar{d}_{\alpha\lambda}\omega_{\alpha 2} \end{aligned}$$

mit ganzzahligen Matrizen $A_{\alpha\lambda} = \begin{pmatrix} a_{\alpha\lambda} & b_{\alpha\lambda} \\ c_{\alpha\lambda} & d_{\alpha\lambda} \end{pmatrix}$ und $\bar{A}_{\alpha\lambda} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{\alpha\lambda} & b_{\alpha\lambda} \\ \bar{c}_{\alpha\lambda} & \bar{d}_{\alpha\lambda} \end{pmatrix}$. Der inverse Charakter der Matrizen $(e_{\alpha\beta})$ und $(\bar{e}_{\alpha\beta})$ hat zur Folge, daß die vierreihigen ganzzahligen Matrizen

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}$$

zueinander invers, also beide unimodular sein müssen. Diese Bedingung ist mit der Verträglichkeit der obigen linearen Beziehungen zwischen den Perioden in Einklang zu bringen. Alles dieses wird geleistet, wenn wir nach Annahme einer zweireihigen ganzzahligen unimodularen Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ setzen.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea & eb & a & b \\ c & d & -fc & -fd \\ fa & fb & a & b \\ c & d & -ec & -ed \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & e\bar{b} & -\bar{a} & -f\bar{b} \\ \bar{c} & e\bar{d} & -\bar{c} & -f\bar{d} \\ -f\bar{a} & \bar{b} & e\bar{a} & -b \\ -f\bar{c} & \bar{d} & e\bar{c} & -\bar{d} \end{pmatrix},$$

wobei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $e - f = 1$ ist.

Wählen wir etwa $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ferner $e = 3$, $f = 2$ und $\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $e_\alpha = \bar{e}_\alpha = 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} v_1 &= 3u_1 + u_2, & u_1 &= v_1 - v_2 \\ v_2 &= 2u_1 + u_2, & u_2 &= -2v_1 + 3v_2 \end{aligned}$$

und zwischen den Perioden die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3\omega_{11} &= 12\sigma_{11} + 9\sigma_{12} & \sigma_{11} &= \omega_{11} - 9\omega_{12} \\ 3\omega_{12} &= \sigma_{11} + \sigma_{12} & \sigma_{12} &= -\omega_{11} + 12\omega_{12} \\ \omega_{21} &= 4\sigma_{11} + 3\sigma_{12} & -\sigma_{21} &= -\omega_{11} + 6\omega_{12} \\ \omega_{22} &= -2\sigma_{11} - 2\sigma_{12} & -\sigma_{22} &= \omega_{11} - 8\omega_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\omega_{11} &= 8\sigma_{21}+6\sigma_{22} & -2\sigma_{11} &= -2\omega_{21}-3\omega_{22} \\ 2\omega_{12} &= \sigma_{21}+\sigma_{22} & -2\sigma_{12} &= 2\omega_{21}+4\omega_{22} \\ \omega_{21} &= 4\sigma_{21}+3\sigma_{22} & 3\sigma_{21} &= 3\omega_{21}+3\omega_{22} \\ \omega_{22} &= -3\sigma_{21}-3\sigma_{22} & 3\sigma_{22} &= -3\omega_{21}-4\omega_{22}. \end{aligned}$$

Alle diese Beziehungen sind miteinander verträglich und liefern weiterhin:

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= \omega_{11} & 3\sigma_{21} &= 6\sigma_{11}+3\sigma_{12} \\ \omega_{22} &= -6\omega_{12} & 3\sigma_{21} &= -4\sigma_{11}-\sigma_{12}. \end{aligned}$$

Die Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ sind sämtlich untereinander homöomorph, und es ist $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$. Denn die Funktion $\wp(v_1 | \sigma_{11}, \sigma_{12})$ ist zu $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$ gehörig, da sie wegen des Additionstheorems der $\wp$-Funktion rational aus Funktionen von u_1 und u_2 zusammengesetzt ist, die ihrerseits wegen der Periodenrelationen die Perioden ω_{11}, ω_{12} bezw. ω_{21}, ω_{22} gestatten. Gleiches gilt von $\wp'(v_1 | \sigma_{11}, \sigma_{12})$. Demnach gehört $\mathfrak{L}_1$ zu $\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2$; das gleiche gilt aber von $\mathfrak{L}_2$ aus den analogen Gründen. Bildet man also den Körper $\mathfrak{L}$ aller rationalen Verbindungen von Funktionen aus $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$, so ist $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{K}$ enthalten. Genau ebenso schließt man aber, daß $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in $\mathfrak{L}$ enthalten sind; also ist $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{L}$ enthalten, daher $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}$, und $\mathfrak{L}$ ist direktes Produkt der beiden Körper $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$. Aus den Periodenrelationen geht nun die *Homöomorphie* aller vier Körper untereinander hervor, die ja, wie man sich leicht überzeugt, nichts weiter verlangt, als daß die Perioden*verhältnisse* der beiden jeweils betrachteten Körper ganzzahlig gebrochen linear verwandt sind. Die *Isomorphie* würde verlangen, daß die Perioden selbst bis auf einen Faktor ganzzahlig unimodular verwandt sind; diese Bedingung ist aber für keines der sechs Paare der vier Körper erfüllt.

Hiermit sind alle Behauptungen unseres Satzes bewiesen.

Aus den vorstehenden Erwägungen im Falle $p = 1$ geht hervor, welche Bedeutung den Abbildungen eines Körpers auf seine isomorphen Teilkörper im Zusammenhange mit dem Zerlegungsproblem zukommt. Bei endlichen Körpern spielen die isomorphen Abbildungen dieses Körpers *auf sich selbst* (Galois'sche Gruppe im Falle der Normalkörper) eine ähnlich wichtige Rolle. Sucht man also den Begriff der Galois'schen Gruppe auf Körper von positivem Transzendenzgrad sinngemäß zu übertragen, so wird man allgemein diesen Abbildungen seine Aufmerksamkeit zuwenden müssen, wie ich dies bereits an anderer Stelle betont habe (Vgl. Jahresb. der Deutschen Mathematikervereinigung 1924, S. 112—116).

Les suites de Farey et le problème des nombres premiers.

Von

J. Franel in Zürich.

Vorgelegt von E. Landau in der Sitzung vom 21. November 1924.

L'hypothèse relative aux racines imaginaires de la fonction $\zeta(s)$ énoncée par Riemann dans son célèbre mémoire sur les nombres premiers n'a été ni confirmée, ni infirmée. Sa démonstration présente les plus grandes difficultés et semble être réservée à un avenir encore lointain. En attendant nous nous proposons, dans cette note, de montrer que le contenu de l'hypothèse en question est exprimé complètement par une propriété des suites de Farey où n'interviennent que des nombres rationnels.

La suite de Farey du n^e ordre est constituée par les fractions irréductibles positives dont le dénominateur est au plus égal à n.

Soient

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots$$

ces fractions rangées par ordre de grandeur croissante,

$$A(n) = A = \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n)$$

le nombre de ces fractions $\leqq 1$, et plus généralement $g(x, n)$ le nombre des termes de notre suite $\leqq x$, x désignant une quantité positive quelconque.

Le nombre des fractions irréductibles positives $\leqq x$ de dénominateur r a pour expression

$$\sum \mu\left(\frac{r}{d}\right)[dx],$$

où la somme s'étend aux diviseurs du nombre r. On en conclut

$$g(x, n) = \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{d} \mu\left(\frac{r}{d}\right)[dx] = \sum_{a=1}^{a=n} [ax]\, M\left[\frac{n}{a}\right],$$

en faisant

$$M(n) = \sum_{r=1}^{r=n} \mu(r).$$

Introduisons la fonction périodique

$$f(x) = [x] - x + \tfrac{1}{2};$$

il viendra, si l'on observe que

$$A = \sum_a a M\left[\frac{n}{a}\right], \quad 1 = \sum_a M\left[\frac{n}{a}\right],$$

$$g(x, n) = \sum_a f(ax) M\left[\frac{n}{a}\right] - \tfrac{1}{2} + Ax$$

ou

$$g(x, n) = \delta(x, n) - \tfrac{1}{2} + Ax,$$

si l'on fait

$$\delta(x, n) = \sum_a f(ax) M\left[\frac{n}{a}\right].$$

J'entends par ϱ_0 le nombre 0. Dans l'intervalle $\varrho_i \dots \varrho_{i+1}$,

$$\delta(x, n) = i + \tfrac{1}{2} - Ax$$

ou

$$\delta(x, n) = \delta_i - A(x - \varrho_i),$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\delta_i = i + \tfrac{1}{2} - A\varrho_i,$$

en désignant ainsi par δ_i la limite de $\delta(x, n)$ quand x tend vers ϱ_i par des valeurs décroissantes.

On a évidemment

$$\delta_i + \delta_{A-i} = 1, \tag{1}$$

$$\delta_i + \delta_{A-i-1} = A(\varrho_{i+1} - \varrho_i), \tag{2}$$

d'où l'on déduit, en particulier,

$$\sum_{i=0}^{A-1} \delta_i = \frac{A}{2}.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$I(n) = \int_0^1 \delta^2(x, n)\, dx.$$

On s'assure aisément[1]) que

$$\int_0^1 f(ax) f(bx)\, dx = \frac{(a, b)^2}{12\, a \cdot b}.$$

1) En utilisant le développement de $f(x)$ en série trigonométrique.

Dans cette formule, a et b désignent deux nombres entiers positifs et (a, b) leur plus grand commun diviseur.

Il en résulte

$$I(n) = \frac{1}{12} \sum_{b=1}^{b=n} \sum_{a=1}^{a=n} \frac{(a, b)^2}{a \cdot b} M\left[\frac{n}{a}\right] M\left[\frac{n}{b}\right].$$

Faisons

$$C(n) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{1}{a} M\left[\frac{n}{a}\right]$$

et

$$H(n) = \sum' \frac{1}{a \cdot b} M\left[\frac{n}{a}\right] M\left[\frac{n}{b}\right],$$

la sommation dans cette dernière équation s'étendant aux couples de nombres entiers positifs a et $b \leqq n$, et premiers entre eux.

On aura

$$C^2(n) = \sum_r \frac{1}{r^2} H\left[\frac{n}{r}\right],$$

d'où

$$H(n) = \sum_r \frac{\mu(r)}{r^2} C^2\left[\frac{n}{r}\right],$$

puis

$$I(n) = \frac{1}{12} \sum_r H\left[\frac{n}{r}\right],$$

(3) $$I(n) = \frac{1}{12} \sum_r \sigma(r) C^2\left[\frac{n}{r}\right],$$

où

$$\sigma(r) = \sum_d \frac{\mu(d)}{d^2} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

La somme s'étend aux diviseurs de r et le produit aux facteurs premiers contenus dans r.

Les quantités $\sigma(r)$ sont donc des grandeurs positives $\leqq 1$. Quant à $C(n)$, c'est la somme des n premiers coefficients dans le développement de la fonction $\dfrac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)}$ en série de Dirichlet:

$$\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s},$$

$$C(n) = \sum_{r=1}^{r=n} c(r).$$

D'autre part, on a

$$I(n) = \sum_{i=0}^{A-1} \int_{\varrho_i}^{\varrho_{i+1}} \delta^2(x, n)\, dx = \sum_i \int_{\varrho_i}^{\varrho_{i+1}} (\delta_i - A(x - \varrho_i))^2\, dx,$$

d'où, en tenant compte de l'équation (2),

$$I(n) = \sum_{i=0}^{A-1}\left(\frac{\delta_i^3 + \delta_{A-i-1}^3}{3A}\right) = \frac{2}{3A}\sum_i \delta_i^3.$$

D'ailleurs, en vertu de l'équation (1), $\delta_i - \frac{1}{2}$ change simplement de signe quand on y remplace i par $A - i$, de sorte que

$$\sum_i (\delta_i - \tfrac{1}{2})^3 = 0,$$

d'où résulte, puisque $\sum_i \delta_i = \frac{A}{2}$,

$$I(n) = \frac{1}{A}\sum_i \delta_i^2 - \tfrac{1}{6},$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\sum_i \left(\delta_i - \frac{1}{2}\right)^2 = A\left(I(n) - \frac{1}{12}\right)$$

ou

$$\sum_i \left(\frac{i}{A} - \varrho_i\right)^2 = \frac{1}{A}\left(I(n) - \frac{1}{12}\right).$$

Maintenant si l'hypothèse de Riemann est fondée, $M(n)$, comme l'a démontré M. Littlewood [1]. est de l'ordre $n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ (ε quantité positive aussi petite qu'on le veut); il en est de même évidemment de $C(n)$. Par conséquent $I(n)$, en vertu de la formule (3), est de l'ordre $n^{1+\varepsilon}$.

Réciproquement, si $I(n)$ est de l'ordre $n^{1+\varepsilon}$, on aura, à plus forte raison,

$$C^2(n) = O\left(n^{1+\varepsilon}\right),$$

$$C(n) = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

La série

$$\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)} = \sum_n \frac{c(n)}{n^s}$$

converge pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$ et l'hypothèse de Riemann est confirmée.

L'affirmation de l'illustre géomètre revient donc à celle-ci:

$$I(n) = O\left(n^{1+\varepsilon}\right)$$

ou, ce qui revient au même, à cette autre:

$$\sum_i \left(\frac{i}{A} - \varrho_i\right)^2 = O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right).$$

C'est ce que nous voulions établir.

1) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 154 (1912), p. 263—266.

Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung von Herrn Franel.

Von

Edmund Landau.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. November 1924.

Einleitung.

Es war seit zwölf Jahren durch Herrn Littlewood bekannt, daß die Riemann'sche Vermutung über die Nullstellen der Zetafunktion einer Eigenschaft der Fareybrüche äquivalent ist. Denn Herr Littlewood hatte bewiesen, daß die Riemann'sche Vermutung der Relation

$$(1) \qquad M(n) = \sum_{r=1}^{n} \mu(r) = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

(bei jedem $\varepsilon > 0$) äquivalent ist; andererseits ist bekanntlich $\mu(r)$ die Summe der primitiven r-ten Einheitswurzeln, also

$$M(n) = \sum_{\nu=1}^{A} e^{2\pi i \varrho_\nu} = \sum_{\nu=1}^{A} \cos 2\pi \varrho_\nu,$$

wo ϱ_ν die wachsend geordneten positiven reduzierten Brüche $\leqq 1$ mit Nenner $\leqq n$ durchläuft und $A = A(n) = \sum_{r=1}^{n} \varphi(r)$ ihre Anzahl ist. Wir wußten also, daß

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{A} e^{2\pi i \varrho_\nu} = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

der Riemann'schen Vermutung äquivalent ist.

Die große Leistung Herrn Franels ist, daß er gezeigt hat: Wird

$$\varrho_\nu - \frac{\nu}{A} = \eta_\nu = \eta_\nu(n)$$

gesetzt, so ist die Riemann'sche Vermutung der rationalen Re-

lation zwischen Fareybrüchen

$$\sum_{\nu=1}^{A} \eta_\nu^2 = O\left(n^{-1+\varepsilon}\right) \tag{3}$$

äquivalent.

Der Hauptteil des Franel'schen Beweises besteht in der Aufstellung der folgenden Identität (6), aus der er das weitere auf Grund des Littlewood'schen Satzes leicht schließt[1]): Wird

$$C(n) = \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a} M\left[\frac{n}{a}\right], \tag{4}$$

$$I = I(n) = \frac{1}{12} \sum_{r=1}^{n} C^2\left[\frac{n}{r}\right] \prod_{p/r}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \tag{5}$$

gesetzt, so ist

$$\sum_{\nu=1}^{A} \eta_\nu^2 = \frac{1}{A}\left(I - \frac{1}{12}\right). \tag{6}$$

Zur Orientierung bemerke ich gleich, daß die trivialen Abschätzungen

---

1) Für seine hierbei benutzte Identität

$$\int_0^1 f(ax)f(bx)\,dx = \frac{(a,b)^2}{12ab}$$

($f(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$, a und b positive ganze Zahlen) teile ich hierdurch den folgenden elementaren Beweis mit; er stützt sich auf die bekannte Identität

$$\sum_l f\left(x + \frac{l}{m}\right) = f(mx),$$

wo l ein vollständiges Restsystem mod. m durchläuft.

1. Es sei $(a, b) = 1$. Dann ist

$$\int_0^1 f(ax)f(bx)\,dx = \sum_{h=0}^{a-1} \int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h+1}{a}} f(ax)f(bx)\,dx$$

$$= \sum_{h=0}^{a-1} \int_0^1 f\left(a\left(\frac{y}{a} + \frac{h}{a}\right)\right) f\left(b\left(\frac{y}{a} + \frac{h}{a}\right)\right) \frac{dy}{a} = \frac{1}{a} \sum_{h=0}^{a-1} \int_0^1 f(y) f\left(\frac{by}{a} + \frac{bh}{a}\right) dy$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^1 f(y) \sum_{h=0}^{a-1} f\left(\frac{by}{a} + \frac{bh}{a}\right) dy = \frac{1}{a} \int_0^1 f(y) f(by)\,dy$$

$$= \frac{1}{ab} \int_0^1 f(x) f(x)\,dx = \frac{1}{ab} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 dx = \frac{1}{12ab}.$$

2. Es sei $(a, b) = c > 1$, $\frac{a}{c} = \alpha$, $\frac{b}{c} = \beta$. Wegen $(\alpha, \beta) = 1$ ist nach 1.

$$\int_0^1 f(ax)f(bx)\,dx = \int_0^1 f(\alpha \cdot cx) f(\beta \cdot cx)\,dx = \frac{1}{c} \int_0^c f(\alpha y) f(\beta y)\,dy$$

$$= \int_0^1 f(\alpha y) f(\beta y)\,dy = \frac{1}{12\alpha\beta} = \frac{c^2}{12ab}.$$

$$M(n) = O(n), \quad \frac{1}{A(n)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

aus (4), (5), (6) liefern:

$$C(n) = O \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a} \frac{n}{a} = O(n),$$

$$I = O \sum_{r=1}^{n} \frac{n^2}{r^2} = O(n^2).$$

(7) $$\sum_{v=1}^{A} \eta_v^2 = O(1).$$

Ich will in dieser Note dreierlei hinzufügen:

1) Die Riemann'sche Vermutung ist der Relation

(8) $$\sum_{v=1}^{A} |\eta_v| = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

äquivalent.

Dazu habe ich nur zu zeigen:

I) aus (3) folgt (8),

II) aus (8) folgt (2).

Denn nach Herrn Franel folgt (3) aus (2).

2) Die Relation

(9) $$\sum_{v=1}^{A} e^{2\pi i \frac{v}{A}} \eta_v = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

(welche offenbar nicht mehr besagt als (8)) ist der Riemann'schen Vermutung äquivalent, besagt also nach 1) nicht weniger als (8).

Dazu habe ich nur zu zeigen: aus (9) folgt (2).

3) Jede der beiden Relationen

(10) $$\sum_{v=1}^{A} \eta_v^2 = O\left(n^{-1+\frac{21 \log\log\log n}{\log\log n}}\right)$$

bezw.

(11) $$\sum_{v=1}^{A} |\eta_v| = O\left(n^{\frac{1}{2}+\frac{11 \log\log\log n}{\log\log n}}\right)$$

(welche offenbar nicht weniger besagen als (3) bezw. (8)) ist der Riemann'schen Vermutung äquivalent, besagt also nach dem Franel'schen Satze nicht mehr als (3) bezw. nach 1) nicht mehr als (8).

Dazu habe ich nur zu zeigen: aus der Riemann'schen Vermutung folgen (10) und (11).

§ 1.

I) Aus (3) folgt nach der Cauchy'schen Ungleichung und mit Rücksicht auf $A \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \nu \leqq n^2$

$$(12) \quad \sum_{\nu=1}^{A} |\eta_\nu| \leqq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{A} 1^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{A} \eta_\nu^2} = \sqrt{A}\sqrt{\sum_{\nu=1}^{A} \eta_\nu^2} \leqq n \sqrt{\sum_{\nu=1}^{A} \eta_\nu^2}$$
$$= O\left(n^{1 + \frac{-1+\varepsilon}{2}}\right) = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

also (8). (Die Bedeutung von η_ν wurde hierbei nicht benutzt.)

II) Für $n > 1$ ist

$$\sum_{\nu=1}^{A} e^{2\pi i \frac{\nu}{A}} = 0,$$

$$(13) \quad \sum_{\nu=1}^{A} e^{2\pi i \varrho_\nu} = \sum_{\nu=1}^{A} e^{2\pi i \frac{\nu}{A}} e^{2\pi i \eta_\nu} = \sum_{\nu=1}^{A} e^{2\pi i \frac{\nu}{A}} \left(e^{2\pi i \eta_\nu} - 1\right),$$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{A} e^{2\pi i \varrho_\nu}\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{A} \left|e^{2\pi i \eta_\nu} - 1\right| = 2 \sum_{\nu=1}^{A} |\sin \pi \eta_\nu| \leqq 2\pi \sum_{\nu=1}^{A} |\eta_\nu|.$$

Aus (8) folgt also (2).

Das Amüsante ist, daß (3) aus (8) hintenherum (über (2)) folgt; was man natürlich nicht ohne Rücksicht auf die Bedeutung der Zahlen η_ν herausrechnen kann.

§ 2.

Für $-2\pi \leqq \alpha \leqq 2\pi$ ist

$$|e^{\alpha i} - 1 - \alpha i| \leqq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|\alpha|^m}{m!} \leqq c\alpha^2.$$

Aus (13) und (7) folgt also

$$\left|\sum_{\nu=1}^{A} e^{2\pi i \varrho_\nu} - 2\pi i \sum_{\nu=1}^{A} e^{2\pi i \frac{\nu}{A}} \eta_\nu\right| \leqq 4\pi^2 c \sum_{\nu=1}^{A} \eta_\nu^2 = O(1).$$

Falls (9) wahr ist, ist also (2) wahr.

§ 3.

In einer im Druck befindlichen Arbeit *Über die Möbius'sche Funktion* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo] füge ich dem Littlewood'schen Satz hinzu: aus der Riemann'schen Vermutung folgt

$$M(n) = O\left(n^{\frac{1}{2} + \frac{10 \log\log\log n}{\log\log n}}\right).$$

Hieraus folgt nach (4), (5), (6): Wenn die Riemann'sche Vermutung wahr ist, so ist

$$C(n) = O \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a} \left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{10 \log\log\log n}{\log\log n}} = O\left(n^{\frac{1}{2} + \frac{10 \log\log\log n}{\log\log n}}\right),$$

$$I = O \sum_{r=1}^{n} \frac{n}{r} n^{\frac{20 \log\log\log n}{\log\log n}} = O\left(n^{1 + \frac{21 \log\log\log n}{\log\log n}}\right),$$

(10) $$\sum_{v=1}^{A} \eta_v^2 = O\left(n^{-1 + \frac{21 \log\log\log n}{\log\log n}}\right).$$

Aus (10) folgt (11) wegen (12).

Schluss.

Das Endergebnis dieser Abhandlung ist: Die Anzahl der richtigen unter den Relationen (1), (2), (3), (8), (9), (10), (11) ist ein ganzzahliges Vielfaches von 7.

Über
das Verhalten einiger Minerale der Salzlagerstätten gegenüber hohem Druck bei wechselnden Temperaturen, nach Versuchen von A. Geller[1]).

Von

O. Mügge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 1. August 1924.

Die Versuche erstreckten sich auf die Ermittelung:
1) der Fließdrucke von Steinsalz, Sylvin, Bischofit und Carnallit,
2) der Schmelztemperaturen von Kainit, Bischofit und Carnallit.

Sie wurden mit derselben Apparatur ausgeführt, die Hermann Rose und O. Mügge[2]) bei der Untersuchung des rhombischen Schwefels benutzten. Das Material für die Druckzylinder wurde wieder von der Firma Gebr. Böhler u. Co. in Leipzig in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt. Für niedere Temperatur wurde der elektrische Ofen durch ein ringförmiges Gefäß mit Kältemischungen ersetzt.

I. Die Fließdrucke von Steinsalz, Sylvin, Bischofit und Carnallit.

Zur Ermittelung des Fließdruckes wurde feines Krystallpulver wachsenden Drucken ausgesetzt, bis es zwischen Druckstempel und Grundplatte herausgequetscht wurde, was daran erkannt wurde, daß der Druck nicht weiter gesteigert werden konnte, während dasselbe Pulver einen wenig niedrigeren Druck beliebig lange ertrug. Die Versuche waren durchaus reproduzierbar. Sie führten auch dann zu Werten, die nur innerhalb der durch die Fehler der Temperatur- und Druckbestimmungen bedingten Grenzen von einander abwichen, wenn sie mit Material verschiedenen Vorkommens und in Druckzylindern von verschiedenen Abmessungen angestellt wurden.

Steinsalz. Der Fließdruck steigt von rd. 3300 kg/cm² bei +300° auf 10100 bei −75°. Eine Extrapolation der Fließdruck-

---

1) Erscheint ausführlich in Zeitschr. f. Kryst. **60**, 1924.

2) Herm. Rose und O. Mügge, Neues Jahrb. f. Min. BB. **48**, 150, 1923.

kurve bis zum Schmelzpunkt (800°) läßt erkennen, daß hier der Fließdruck voraussichtlich gleich Null werden würde (was durch die Beobachtungen an den folgenden Salzen, bei denen der Fließdruck bis in die Nähe ihrer Schmelztemperatur bestimmt werden konnte, bestätigt wird)[1]). Andererseits führt Extrapolation bis zum absoluten Nullpunkt ohne Zwang zu einem Werte von rd. 20000 kg/cm², der mit dem von Born[2]) für die Festigkeit von Steinsalz beim absoluten Nullpunkt berechneten übereinstimmt. Mit Wasser, Öl oder Petroleum durchfeuchtetes Krystallpulver gab bei 24 bis 80° nur wenig niedrigere Werte für den Fließdruck, dagegen wurden für Pulver von tiefblauem Steinsalz zweier Fundorte zwischen +10° und 280° merklich niedrigere Werte als für farbloses Steinsalz gefunden. Vergleiche die folgende

Tabelle I.

Fließdruck von blauem gegenüber farblosem Steinsalz.

t	farblos	blau	Differenz
25	7650	7100	550
100	6150	5700	450
200	4500	4300	200
275	3550	3400	150

Es liegt nahe, den Grund darin zu suchen, daß mit der Färbung eine Auflockerung des Atomverbandes infolge teilweiser Neutralisierung der Jonen stattgefunden hat. Durch die Pressung bis zum Fließen wird das blaue Steinsalz bei allen Versuchstemperaturen (0—250°) entfärbt und hat dann denselben Fließdruck wie ursprünglich farbloses. Die Entfärbung beim Fließen

1) Joffé (Zeitschr. f. Physik, 22, 286, 1924) schließt, daß beim Steinsalz bei Temperaturen unterhalb 190° bei Beanspruchung auf Zug kein Fließen eintritt, weil eine merkliche Deformation der Flecke im Laue-Diagramm nicht zu erkennen war. Demgegenüber muß zunächst betont werden, daß man nur dann erwarten kann Translationen im Lauediagramm angezeigt zu finden, wenn ihr Betrag kein ganzes Vielfaches einer Deckschiebung war. Das Letztere wird bei den Versuchen von Joffé der Fall gewesen sein. Wenn trotzdem keine Störungen im Lauediagramm beobachtet wurden, so dürfte daraus hervorgehen, daß diese Störungen ein weniger feines Mittel zu Erkennung von Translationen sind, als die Translationsstreifung; denn durch die letztere ist sie auch unterhalb 190° am Steinsalz festgestellt.

2) Mündliche Mitteilung.

wird vielleicht dadurch möglich, daß die Bewegung aller Teilchen gegeneinander eine Wiedereinrichtung der Elektronen in ihre normale Lage gestattete.

Sylvin. Der Fließdruck steigt hier von 2250 kg/cm² bei +270° auf 6675 bei −25°; er ist also etwas niedriger als bei Steinsalz. Im übrigen ist die Fließdruckkurve der des Steinsalzes sehr ähnlich, was bei der großen Analogie beider Salze hinsichtlich Spaltbarkeit, Translations-Flächen und Richtungen zu erwarten war.

Mischungen von NaCl und KCl in verschiedenen Verhältnissen ergaben für Konglomerate und entmischte Mischkrystalle Werte, die zwischen denen der Komponenten lagen und sich annähernd linear mit dem Gehalt (in Mol. %) änderten. Nicht entmischte Mischkrystalle dagegen hatten viel niedrigere Fließdrucke; den niedrigsten jene für die auch das Schmelzen bei der niedrigsten Temperatur erfolgt. Vgl. die folgende

Tabelle II.
Fließdrucke der Mischkrystalle von NaCl und KCl.

Mol. % NaCl	0°	+50°	100°	150°	200°	250°
100	8300	7150	6100	5300	4500	3850
90	7400	6400	5550	4750	4000	3400
80	6850	5850	5100	4300	3700	3100
55	*4800*	*4100*	*3500*	*2900*	*2450*	—
30	5250	4500	3750	3150	2550	2050
10	5650	4800	4050	3350	2750	2250
0	6100	5250	4400	3700	3000	2450

Das ist in doppelter Hinsicht von Interesse. Einmal weil bei Metallen meist beobachtet ist, daß Mischkrystalle größere sog. Härte (meist bestimmt als Eindringungsfestigkeit) haben als die reinen Metalle, zweitens weil von manchen Metallographen[1]) angenommen wird, daß die geringere Duktilität von Mischkrystallen gegenüber ihren Komponenten darauf beruht, daß in ihnen eine „Blockierung" der Gleitflächen stattfinde. Von krystallographischer Seite lagen bisher Untersuchungen über die Gleitfähigkeit von Mischkrystallen kaum vor, weil es an hinreichend homogenem Material von Einzelkrystallen fehlte. An Mischkrystallen von NaCl—KCl ließ sich nun feststellen, daß in ihnen Translation

1) z. B. Jeffries u. Archer, Chem. a. Metallurg. Eng. 27, 882. 1922 nach Phys. Ber. 4, 165, 1923.

nach denselben Flächen und Richtungen wie in den Komponenten und mit merklich gleicher Leichtigkeit vor sich geht.

Bischofit. Bei dem niedrigen Schmelzpunkt dieses Minerals (117°) konnte der Fließdruck bis in die Nähe (110°) der Schmelztemperatur verfolgt und so nachgewiesen werden, daß er stetig bis zu Werten herabsinkt, die mit dem benutzten Apparat nicht mehr meßbar waren; daß er dagegen bei Temperaturen unterhalb 0° sehr schnell Werte annimmt, die sogar den des Steinsalzes übersteigen (er steigt von 3750 kg/cm² bei 0° auf 17250 bei −44°). Ob also aus einem Steinsalz-Bischofit-Gemenge zuerst das Steinsalz oder der Bischofit ausgequetscht wird, hängt (gegenseitige Nichtbeeinflussung vorausgesetzt!) von der Temperatur ab, und man muß damit rechnen, daß dasselbe auch bei anderen Mineralgemengen der Fall sein kann.

Carnallit. Der Fließdruck steigt von 75 kg/cm² bei 152° (Schmelztemperatur 167°) auf 8000 bei +1,5°, unterhalb 0° (bis −32°) war selbst durch 40000 kg/cm² kein Fließen zu erreichen.

Bei Bischofit und Carnallit sind keine Translationsebenen nachgewiesen, wohl aber einfache Schiebungen. Sie gehen solche schon bei gewöhnlicher Temperatur mit sehr großer Leichtigkeit ein, namentlich der Bischofit. Da sie sich dabei leicht verbiegen, ist anzunehmen, daß ein Druck der nach Umstellung in die Zwillingslage sich noch verstärkt, zu Translationen (längs derselben[1]) Gleitfläche wie die einfache Schiebung und nach entgegengesetzter Richtung) führen wird, ein Vorgang der am $BaBr_2 . 2H_2O$ streng nachgewiesen und auch am Kalkspat wahrscheinlich gemacht ist. Dabei ist anzunehmen, daß ein aus geeigneter Richtung wirkender Druck (dessen auf die Richtung der einfachen Schiebung entfallende Komponente aber unter dem für eine solche nötigen Minimalwert bleiben müßte) auch direkt Translation (ohne vorherige Umstellung in die Zwillingslage) bewirken kann. Das Kennzeichen für Translation, die Translations-Streifung, versagt hier, da sie von der Zwillingsstreifung überdeckt wird.

Die am Carnallit beim Pressen in niederen Temperaturen beobachteten explosionsartigen Erscheinungen könnten daher rühren, daß dann (ähnlich wie bei Kalkspat) einfache Schiebungen nur noch schwierig vor sich gehen und wenn sie durch Steigerung des Drucks erzwungen werden, plötzliche Druckänderungen veranlassen, weil sie unstetige Änderungen des Gitters von bestimmtem endlichen Betrage nach sich ziehen, nicht, wie Translationen, jeden

1) Bei Bischofit nur sehr annähernd derselben.

beliebig kleinen Betrag bis zur Größe einer Deckschiebung annehmen können. Übrigens ist es wahrscheinlich, daß auch die Leichtigkeit, Translationen einzugehen für diese Krystalle mit sinkender Temperatur stark abnimmt. Eine beschleunigte Zunahme des Fließdruckes mit sinkender Temperatur ist für alle vier Salze charakteristisch. Anzeichen einer Umwandlung der Salze in andere Modifikationen oder andere Hydrate machen sich nicht bemerklich, die Fließdruckkurven verlaufen durchaus stetig.

Es ist öfter die Ansicht geäußert, so von Johnston und Adams, daß bei jeder plastischen Deformation eines Krystalls eine teilweise Verflüssigung desselben stattfindet, d. h. eine isotrope Phase entsteht; ebenso scheint Jeffries mit anderen Metallographen der Meinung zu sein, daß diese Phase längs den Korngrenzen und Gleitflächen existiert; sie soll sich durch Fließbarkeit auszeichnen und keine Diskontinuität im Schmelzpunkt zeigen. Wenn dies zuträfe, sollte beim Fließen des Carnallit außer einer amorphen Phase auch KCl entstehen, ebenso aus den mechanischen Gemengen von KCl und NaCl Mischkrystalle, aber nichts davon ist beobachtet. Da durch bloße Translation das Gitter keinerlei Änderung erfährt, wenn ihr Betrag ein ganzes Vielfaches einer Deckschiebung ist; da ferner, wenn letzteres nicht der Fall ist, die (dauernden) Veränderungen des Abstandes der Atome Spannungen nach sich ziehen müssen, von denen in den isotrop-flüssigen Phasen nichts zu sehen ist, muß man schließen, daß zum Schmelzen noch etwas anderes hinzukommen muß, was durch äußeren Druck nicht bewirkt werden kann, nämlich die lebhaftere Wärmeschwingung. Das Mikroskop zeigt ferner, daß auch die stärkst deformierten Krystalle keineswegs auch nur zeitweilig geschmolzen gewesen sind, sie enthalten vielfach noch die Gas- und Flüssigkeitseinschlüsse in derselben Form und Anordnung wie vor der Pressung. Es ist daher nicht anzunehmen, daß das Fließen auf Schmelzung beruht. Daß gleichwohl eine Beziehung zwischen jenen Werten von p und t, bei denen einmal eine Schmelzung, das andere Mal Fließen eintritt, besteht, scheint namentlich nach den Beobachtungen an den (Na, K) Cl-Mischkrystallen kaum zweifelhaft.

Die Fähigkeit Gleitungen, d. i. gradlinige Bewegungen längs bestimmter Ebenen und in bestimmten Richtungen einzugehen, ist auf Krystalle beschränkt, das Auftreten von Translations- oder Zwillingsstreifung infolge Pressung ist, zumal bei optisch isotropen Krystallen ohne deutliche Spaltbarkeit, z. B. Metallen wie Au, Ag, Cu, eines der sichersten Kennzeichen des krystallinen Zustandes. Alle Beobachtungen sprechen dafür, daß diese Gleitungen

die Ursache von plastischem Verhalten der Krystalle sind, während die Ursache für plastisches Verhalten amorpher Stoffe noch nicht bekannt ist. Die Bewegung längs einer Translationsfläche kann nun so vor sich gehen, daß sie keinerlei (dauernde) Inhomogenität zur Folge hat, — wenn nämlich ihr Betrag ein ganzes Vielfaches einer Deckschiebung des Krystallgitters ist. Es wird dies aber i. A. nur der Fall sein, wenn in dem Individuum nur 1 Gleitfläche und 1 Gleitrichtung vorhanden ist. Gibt es deren mehrere, so wird der Krystall bei Beanspruchung in jeder Richtung i. A. Gleitungen nach mehreren von ihnen eingehen, die an ihrer Durchkreuzung zur Entstehung von hohlen Kanälen und anderen Inhomogenitäten Veranlassung geben, außerdem aber namentlich zu Krümmungen der Lamellen um die Richtung f, die in T senkrecht t liegt. Wenn nun die Translationslamellen in diesem Falle in unmittelbarer Berührung miteinander bleiben würden (sodaß sie etwa ein System von zentrisch ineinander steckenden Zylinderflächen bilden würden mit der Richtung t als Axe), so könnte, wie leicht ersichtlich, der Betrag der Translation nur noch für solche Lamellen ein ganzes Vielfaches einer Deckschiebung sein, die einen gewissen, von der Stärke der Krümmung und den Konstanten des Gitters abhängigen Abstand haben. Für alle Lamellen in den zwischenliegenden Niveaus dagegen wäre der Betrag der Translation kein ganzes Vielfaches einer Deckschiebung[1]). Ein solcher Zustand müßte offenbar zu wahrscheinlich hohen Spannungen zwischen benachbarten Translationsebenen führen, welche die Reaktionsfähigkeit dieser Teile fördern, wenn sie bestehen bleiben, oder ihren Ausgleich im Aufblättern des Krystalls längs den Translationsniveaus finden.

Beides ist nach den Erfahrungen der Mineralogen und Petrographen und hinsichtlich des ersten Punktes jetzt auch der Metallographen geradezu typisch für stark beanspruchte Krystalle. In dem Umstande, daß der Translationsbetrag i. A. kein ganzes Vielfaches einer Deckschiebung sein kann, möchte ich daher eine wesentliche Ursache für das abweichende Verhalten stark beanspruchter Krystalle gegenüber dem Verhalten nicht beanspruchter sehen, wie es in ihrer großen Neigung zum Umkristallisieren und ihrer gesteigerten Fähigkeit zu chemischen Umsetzungen zum Ausdruck kommt[2]).

1) O. Mügge, Neues Jahrb. f. Min. 1898 I, 155.

2) Vergl. über Judd's „Lösungsflächen" in Krystallen mit „schillerization" bei O. Mügge, l. c. p. 117.

Jede Krümmung bedeutet daher auch in „plastischen" translationsfähigen Krystallen Entstehung von Inhomogenitäten, und da sie bei Pressung von Aggregaten notwendig eintreten müssen, kann von einer „bruchlosen Umformung" selbst solcher Gesteine, die sich aus lauter translationsfähigen Krystallen aufbauen, streng genommen nicht die Rede sein.

Noch viel mehr gilt dies für die gewöhnlichen Gesteine, deren Gemengteile erst unter viel höheren Drucken oder überhaupt keine Gleitung eingehen. So war es z. B. unmöglich, mit der benutzten Vorrichtung, die Drucke bis 40 000 kg/cm² gestattete, Aggregate von Gyps und Anhydrit (die beide Translationen, der letztere auch einfache Schiebungen, eingehen) zum Fließen zu bringen. Ebenso haben früher zusammen mit Hermann Rose angestellte Versuche ergeben, daß Quarz selbst bei Drucken von 30000 kg/cm² und Steigerung der Temperatur auf über 300° keine Spur von Plastizität zeigt: die Krystallflächen und angeschliffene polierte Flächen blieben vollkommen eben und ohne Translationsstreifen[1]), nur zeigten sie an besonders stark gepreßten Stellen [2]) eine sehr auffallende Absonderung in etwa 0.1 mm dicke Blättchen, die, wenn auch nicht vollkommen eben, sehr nahe senkrecht zur optischen Axe waren [3]).

Von geologischen Autoren ist öfter angenommen, daß ein Fließen der gewöhnlichen Kalk- und Silikatgesteine schon in Tiefen erfolgt, die erheblich geringer sind als jene, in denen es für die hier untersuchten sehr plastischen Minerale zu erwarten ist. Stellt man die Abhängigkeit von Temperatur und Druck von der Tiefe unter der Erdoberfläche durch eine Gerade in einem Diagramm dar, in der auch die Fließdruckkurven von Carnallit, Bischofit, Sylvin und Steinsalz eingetragen sind, so zeigt sich, daß zwar für Carnallit der Fließdruck schon in etwa 3 km Tiefe erreicht wird, für Bischofit sogar schon etwas früher, daß dies dagegen für Sylvin erst in ca. 10 km und für Steinsalz erst in rd. 12 km Tiefe zu erwarten wäre. Es ist daher klar, daß man nicht berechtigt ist anzunehmen, daß Kalkstein oder gar Silicatgesteine in 12 km Tiefe „latent plastisch" sein würden und bei Eintritt einer Bewegung

---

1) Dagegen berichtet z. B. W. Schmidt nach Neues Jahrb. f. Min. 1922 II — 323 — von einer Dynamometamorphose, die sich „als Kaltreckung unter solchen Umständen ausspricht, daß die Quarze nahezu bruchlos auf das Äußerste deformiert sind".

2) In ihrer Nähe waren, um den Druck ungleichmäßig zu machen, im Ton scharfkantige Stahlstückchen eingebettet, die nachher sehr stark verbogen waren.

3) Merkliche optische Zweiaxigkeit war nicht eingetreten.

in dieser Tiefe fließen würden. Alles weist vielmehr darauf hin, daß ein „Fließen“ bei ihnen erst in einer Tiefe eintreten würde, wo der Einfluß des Druckes gegenüber dem der Temperatur nur noch gering wäre, nämlich erst in Tiefen, in denen die Schmelztemperatur dieser Gesteine nahezu erreicht wäre (in 30—40 km Tiefe, wo eine Temperatur um 1000° herrscht, würde der Druck erst 10000 kg erreichen).

Aber auch für Sylvin und Steinsalz kommen Belastungen von 10 bzw. 12 km Gestein nach der Meinung der Geologen kaum in Frage. Da nun trotzdem Aus- und Hochquetschen von Steinsalz an manchen Stellen beobachtet ist, kann dafür nur lokale Drucksteigerung durch Hinzutreten von tektonischem Druck in Anspruch genommen werden; denn eine regionale Verminderung der geothermen Tiefenstufen (die lokal öfter beobachtet ist) ist wenig wahrscheinlich. Es wäre darnach zu erwarten, daß das „Aufsteigen“ des Steinsalzes auf solche Gebiete beschränkt ist, welche auch hinsichtlich ihrer sonstigen Sedimente starke Störungen aufweisen.

II. Die Schmelzkurven von Kainit, Bischofit und Carnallit.

Zur Prüfung, in wie weit der Druck bei Einbettung des Materials in Ton auch für die Bestimmung der Schmelztemperatur als gleichförmig gelten kann, wurde die Schmelzkurve des Glaubersalzes, das von Tammann und von Block schon bei streng hydrostatischem Druck untersucht war, aufgenommen. Es ergab sich eine hinreichende Übereinstimmung und damit die Möglichkeit, die Schmelzkurven des Glaubersalzes und der oben genannten Minerale bis zu sehr hohen Drucken zu verfolgen.

Bei Glaubersalz folgt nach dem von Tammann und von Block bestimmten Maximum der Schmelzkurve ein Abstieg nur bis p = 5000 rd, vermutlich weil dann aller beim Schmelzen gebildete Thenardit in der Schmelzflüssigkeit gelöst ist; dann beginnt ein starker Anstieg, der bis zu dem höchsten angewandten Druck (7500 rd.) anhält. Oberhalb p = 5000 konnten keine Schmelzreste wie unterhalb p = 5000 im Einbettungston nachgewiesen werden.

Carnallit. Auch hier sinkt die Kurve nach Erreichung eines Maximums bei t = 205° und p = 1000 rd bis zu einem Knickpunkt bei t = 185 und p = 2000 rd; dann beginnt ein langsamer Aufstieg, der hier aber zu einem deutlichen Maximum bei t = 220 und p = 11500 rd führt. Der Abstieg der Kurve konnte dann bis t = 190° mit p = 22500 rd verfolgt werden. Die bis

zum Knickpunkt im Schmelzprodukt beobachteten Kryställchen (KCl) wurden oberhalb desselben nicht mehr gefunden, es ist daher wahrscheinlich, daß der Carnallit oberhalb des Knickpunktes kongruent schmilzt [1]).

Kainit. Die Schmelzkurve zeigt auch hier zunächst ein Maximum bei $t = 180$, $p = 1900$, der Abstieg hält an bis $t = 150^0$ mit $p = 3000$. Hier hat die Kurve einen Knick und steigt dann ununterbrochen, wenn auch mit abnehmender Geschwindigkeit bis zu dem höchsten beobachteten Druck mit $t = 260^0$, $p = 42000$. Da der Kainit bei $t = 85$ mit $p = 1$ ebenfalls inkongruent schmilzt, liegt die Annahme nahe, daß im Knickpunkt eine Veränderung in der Art des Zerfalls eintritt oder das Schmelzen von da an kongruent erfolgt. Eine Entscheidung zwischen beiden Annahmen durch mikroskopische Untersuchung des Schmelzproduktes war nicht möglich.

Bischofit. Auch hier ähnelt die Schmelzkurve der des Glaubersalzes. Die Kurve steigt erst bis zu einem Maximum bei $t = 147^0$ mit $p = 1550$; dann folgt ein Abstieg mit Knick bei $t = 128^0$, $p = 2900$, darauf ununterbrochener Anstieg der bis $t = 253^0$ und $p = 28500$ verfolgt wurde. Oberhalb des Knickpunktes scheint der Bischofit kongruent zu schmelzen, da von da an ein Bodenkörper in der Schmelzmasse nicht mehr nachgewiesen werden konnte.

Von erheblicher geologischer Bedeutung sind nur die ersten Teile der Schmelzkurven dieser Minerale mit Drucken unterhalb der Knickpunkte; denn die Drucke oberhalb derselben sind schon so groß, daß sie für regionale Änderungen, denen die Salze in der Tiefe unterliegen können, nicht mehr in Frage kommen ($p > 1550$ kg, also Tiefe $h > 6200$ m). Bei den drei Salzen (Tabelle III) ist Schmelzen in folgenden Tiefen (h) zu erwarten:

Tabelle III.

t für p = 0		t	p	h
Kainit	83°	174	1860	5840
Bischofit	117	146.5	1230	4900
Carnallit	167.5	196	1640	6500

1) Bloße Umwandlung des C., etwa aus pseudohexagonal in hexagonal, ist daher weniger wahrscheinlich.

Bei einer Belastung durch Sedimente von der Mächtigkeit h ist also ein Schmelzen eines jeden dieser Salze auch dann möglich, wenn es mit andern Salzen nicht in Berührung steht. Da ein Knickpunkt auf der Schmelzkurve bis zu der h entsprechenden Tiefe nicht beobachtet ist, würde das Schmelzen noch ebenso inkongruent wie an der Oberfläche erfolgen, aber die entstehenden Laugen würden natürlich weggequetscht werden, während das aus Carnallit entstehende KCl an Ort und Stelle bliebe, da sein Fließdruck in der Schmelztiefe h noch nicht erreicht ist.

Die angeführten Zahlen h sind aber nur als Maximalwerte aufzufassen; denn bei Berührung eines jeden dieser Minerale mit einem andern wird i. A. die Schmelztemperatur und damit auch die Schmelztiefe sinken. Ob hier allerdings die angrenzenden nicht salzartigen Sedimente (Ton, Dolomit etc.) von erheblichem Einfluß sein werden ist wohl zweifelhaft, sicher aber z. B. Anhydrit, Gyps, Steinsalz usw. Weitere Versuche werden darüber Aufschluß geben können[1]).

Die Schmelzkurven der drei untersuchten Salze sind noch in anderer Richtung von geologischer Bedeutung, indem sie zeigen, daß das bei gewöhnlicher Temperatur bei ihnen beobachtete inkongruente Schmelzen bei höheren Drucken entweder einem inkongruenten mit anderen Zerfallsprodukten oder (wahrscheinlicher) kongruentem Platz macht. Man wird sich auf Ähnliches auch bei andern Mineralen (namentlich auch Silikaten) gefaßt machen dürfen; nicht nur bei solchen mit leicht flüchtigen Komponenten, wie dies ja durch die Versuche von Boeke, Bowen und Eitel schon erwiesen ist, sondern auch für Minerale ohne solche, z. B. Granat und Orthoklas. Besonders bei Granat wird man bei seiner bekanntlich auffallend großen Dichte annehmen dürfen, daß sein bei gewöhnlichem Druck inkongruentes Schmelzen mit erheblicher Ausdehnung verbunden ist und Druck also den Zerfall beim Schmelzen stark erschweren und schließlich verhindern wird. Legt man für Na-freien Orthoklas die von Ahlers bestimmte Dichte 2.536 zu Grunde, für Leuzit den niedrigen Wert 2.45 (weil als Na-frei vorausgesetzt), für Cristobalit 2.3, so ergibt sich für die von Morey und Bowen beobachtete Umsetzung

1) Eine orientierende Versuchsreihe ergab für eine Mischung von

70 g Kainit + 30 g Carnallit + 0.5 g Na Cl,

die nach van 't Hoff bei $t = 72^0$ und $p = 1$ unter Ausdehnung übergeht in

38 g Kieserit + 62.5 g Lösung,

eine Schmelztiefe von rd. 5 400 m, also merklich niedriger als bei reinem Carnallit und Kainit.

$$K\,Al\,Si_3\,O_8 \rightarrow K\,Al\,Si_2\,O_6 + Si\,O_2$$

auch eine kleine Volumenvermehrung von 110 auf 115. Die angenommenen Werte sind aber natürlich schon wegen der bis zur Umsetzungstemperatur erheblichen und nicht berücksichtigten Ausdehnung ziemlich unsicher.

Untersuchungen in dieser Richtung werden sich aber den Verhältnissen der tieferen Erdkruste erst dann hinreichend nähern können, wenn es gelungen sein wird, für die Preßzylinder und Druckstempel ein Material zu finden, das nicht allein die hohen Drucke großer Tiefen sondern auch die zugehörigen Temperaturen erträgt. Die jetzige Apparatur gestattet kaum 300° zu überschreiten, die schon in 10 km Tiefe erreicht werden, wo der Druck nur 2500 kg beträgt, während sie einen Druck zuläßt von 40000 kg entsprechend einer Tiefe von 160 km, wo die Schmelztemperaturen aller Gesteine jedenfalls längst überschritten sind.

Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung.

Von

H. Weyl, Zürich.

Vorgelegt von C. Runge in der Sitzung vom 21. November 1924.

Im Koordinatenraum der x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ betrachten wir die Gruppe $\mathfrak{G}$ der homogenen linearen Transformationen von der Determinante 1. Die Tensoren νter Stufe in jenem Raum, welche vorgegebenen linearen Symmetriebedingungen genügen, bilden ihrerseits, wenn sie N unabhängige Komponenten besitzen, eine lineare Mannigfaltigkeit von N Dimensionen; unter dem Einfluß der Gruppe $\mathfrak{G}$ erfährt sie eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe Γ homogener linearer Transformationen. Und das wahre mathematische Fundament der Tensorrechnung scheint mir der Satz zu sein, daß auf diese Weise jede zu $\mathfrak{G}$ isomorphe, linear-homogene Gruppe Γ jede „Darstellung von $\mathfrak{G}$" erhalten wird. Zur Kennzeichnung einer bestimmten Größenart im Koordinatenraum gehören im allgemeinen außer der Stufenzahl Symmetrieforderungen. Einen Überblick über die möglichen Symmetriecharaktere von Tensoren νter Stufe gewinnt man leicht auf Grund der namentlich von Frobenius entwickelten Darstellungstheorie für die symmetrische Vertauschungsgruppe S_ν von ν Dingen, wie ich kürzlich gezeigt habe[1]. Einen Symmetriecharakter nenne ich irreduzibel, die zugehörige Größenart einfach, wenn jede weitere hinzugefügte Symmetrieforderung der Größe keine Wertmöglichkeit außer 0 offen läßt. Die Tensoren jeden Symmetriecharakters lassen sich additiv aus unabhängigen Bestandteilen zusammensetzen, welche in diesem Sinne einfache Größen sind. Den irreduziblen Symmetrieklassen der Tensoren entsprechen die irreduziblen Darstellungen Γ von $\mathfrak{G}$.

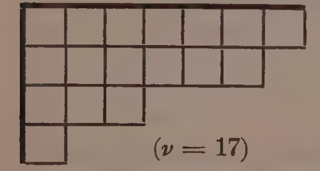
Führt man die kontinuierlichen Gruppen mit Lie auf ihre infinitesimalen Operationen zurück, so formuliert sich das Dar-

1) Rend. Circ. Mat. Palermo **48** (1924), p. 29.

stellungsproblem allgemein folgendermaßen: die Elemente einer inf. Gruppe bilden eine lineare Vektormannigfaltigkeit, innerhalb deren eine distributive „Kommutator-Multiplikation" $[ab]$ erklärt ist, welche den Rechenregeln genügt:

$$[ba] = -[ab]; \quad [[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] = 0.$$

Sind die Elemente Matrizen, so ist $[ab] = ab - ba$ zu setzen. Es soll jedem Element a einer gegebenen inf. Gruppe eine Matrix A so zugeordnet werden: $a \to A$, daß allgemein auf Grund von $a \to A$, $b \to B$ den Elementen λa (λ eine Zahl), $a + b$, $[ab]$ die Matrizen λA, $A + B$, $[AB]$ korrespondieren. Es handelt sich also um reine Algebra. Die zu $\mathfrak{G}$ gehörige inf. Gruppe $\mathfrak{g}$ besteht insbesondere aus allen Matrizen von der Spur 0. E. Cartan hat in einer tiefsinnigen Arbeit aus dem Jahre 1913 im wesentlichen alle irreduziblen Darstellungen einer beliebigen, in abstracto gegebenen inf. Gruppe bestimmen gelehrt[1]). Für $\mathfrak{g}$ gewinnt er in der Tat lauter Gruppen Γ, die angeben, wie sich die Tensoren bestimmter Symmetrieklassen transformieren. Man ordne nämlich die Ziffern von 1 bis ν in ein Schema wie das nebenstehende ein, das durchgehende Horizontal- und Vertikalreihen aufweist. Es sei $\mathfrak{P}(\mathfrak{Q})$ die Gruppe derjenigen Permutationen $P(Q)$, welche jeweils nur die Ziffern der Horizontalreihen (Vertikalreihen) untereinander vertauschen. Auf den willkürlichen Tensor νter Stufe f übe man die sämtlichen Permutationen PQ des Komplexes $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ aus und addiere die so erhaltenen Tensoren, wobei ein Glied das Vorzeichen + oder − bekommt, je nachdem Q eine gerade oder eine ungerade Permutation ist; was so entsteht, durchläuft bei frei veränderlichem f die Tensoren einer einfachen Symmetrieklasse. Auf diesem Wege sind schon früher von A. Young und G. Frobenius die „charakteristischen Einheiten" der symmetrischen Gruppe und damit deren Gruppencharaktere konstruiert worden[2]). Cartan macht auf diesen Zusammenhang nicht aufmerksam, der, wie ich glaube, die ganze Sachlage erst ins rechte Licht rückt. Bei gegebener Stufenzahl ν erhält man hier genau soviele inäquivalente irreduzible Darstellungen Γ, als es verschiedene Klassen konjugierter Elemente



1) Bull. Soc. math. de France **41**, p. 53.

2) Young, Proc. Lond. Math. Soc. **33** (1901), p. 97; **34** (1902), p. 361. Frobenius, Sitzungsber. Preuß. Ak. 1903, p. 328 (auch schon 1900, p. 516). Vgl. ferner: J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924, Kap. VII.

in der symmetrischen Gruppe S_ν gibt; ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der verschiedenen Schemata, d. h. der additiven Zerlegungen von ν in positive Summanden, oder gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \cdots = \nu$$

in nicht-negativen ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots$. Nur wenn $n < \nu$ ist, liefern diejenigen Schemata keine einfache Größe (sondern lediglich 0), in denen Vertikalstollen von einer Länge $> n$ auftreten (ausgeschlossene Schemata); die Gleichung (1) muß ersetzt werden durch

$$(2) \qquad 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \cdots + n \cdot p_n = \nu.$$

Zwei Symmetriecharaktere sind als äquivalent anzusehen, welche im Sinne meiner oben zitierten Note die gleiche Ordnung $(h, h', \ldots)$ besitzen[1]. Es existieren soviele inäquivalente irreduzible Symmetriecharaktere, als die Anzahl der Lösungen von (2) in nicht-negativen ganzen Zahlen p_i beträgt. Äquivalenten Symmetriecharakteren entsprechen äquivalente Darstellungen von $\mathfrak{G}$, und umgekehrt.

Die Aufgabe, alle Darstellungen von $\mathfrak{G}$, nicht bloß die irreduziblen, zu finden, wurde schon vor Cartan von Herrn I. Schur in seiner Dissertation (Berlin 1901) behandelt. Er verwendet die kontinuierliche Gruppe selbst, nicht die zugehörige infinitesimale; der Zusammenhang mit den Darstellungen der endlichen Gruppe S_ν tritt direkt hervor. Aber hier wird eine andere wesentliche Einschränkung gemacht: daß nämlich die Elemente der darstellenden Matrix ganze rationale Funktionen von denen der dargestellten Matrix (a_{ik}) sind. Unser Haupttheorem besagt, daß seine Resultate auch dann vollständig bleiben, wenn jene Einschänkung fallen gelassen wird; vorausgesetzt natürlich, daß man die Gruppe $\mathfrak{G}$ — und nicht wie Herr Schur selber die Gruppe aller homogenen linearen Transformationen ohne die Nebenbedingung $|a_{ik}| = 1$ — zugrunde legt! Nach dem entscheidenden Schritt von Herrn Cartan genügt dazu der Nachweis, daß jede Darstellung von $\mathfrak{G}$ voll reduzibel ist. Das läßt sich aber einsehen mit Hülfe der Integrationsmethode von Hurwitz, die neuerdings Herr Schur zu

1) In dem Ordnungssymbol entspricht jede Zahl $h, h', \ldots$ einem der oben erwähnten Schemata (oder einem Gruppencharakter von S_ν); es sind hierbei, wenn $n < \nu$ ist, natürlich diejenigen Zahlen h fortzulassen, welche zu den ausgeschlossenen Schemata gehören.

ähnlichen Zwecken herangezogen hat[1]). Ich gehe aus von der inf. Gruppe $\mathfrak{g}$ (in n Dimensionen) und ihrer Darstellung γ (in N Dimensionen). Nach dem Grundgedanken von Hurwitz betrachtet man innerhalb $\mathfrak{G}$ zunächst nur die Gruppe $\mathfrak{G}_u$ der unitären Transformationen von der Determinante 1. Die zugehörige inf. Gruppe $\mathfrak{g}_u$ besteht aus allen Matrizen (α_{ik}), für welche

$$\bar{\alpha}_{ik} + \alpha_{ki} = 0, \quad \sum_i \alpha_{ii} = 0$$

ist. Aus den Operationen der inf. Gruppe γ_u, welche innerhalb γ dem Ausschnitt $\mathfrak{g}_u$ aus $\mathfrak{g}$ entspricht, erhält man nach Lie eine Darstellung Γ_u der ganzen kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{G}_u$. Doch bleibt zunächst fraglich, ob Γ_u die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}_u$ einfach oder mehrfach, vielleicht unendlich-vielfach bedeckt; im letzten Fall würde die Hurwitz'sche Methode versagen, da dann Γ_u kein geschlossenes Gebilde wäre. Ich behaupte aber, daß die erste Alternative zutrifft; und zwar, weil sich in der geschlossenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}_u$ jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Den Beweis dafür werde ich sogleich andeuten. Man verfährt nun so[2]): auf die Hermite'sche Einheitsform im N dimensionalen Raum der Gruppe Γ wendet man alle Transformationen von Γ_u an und addiert (d. h. integriert unter Verwendung der natürlichen Volumenmessung, die auf $\mathfrak{G}_u$ wie auf jeder Gruppenmannigfaltigkeit besteht); so gewinnt man eine definite Hermite'sche Form, die invariant ist gegenüber allen Operationen von Γ_u. Infolgedessen ist γ_u voll reduzibel. Dann aber auch γ; denn die Elemente der willkürlichen Matrix von γ sind Linearformen der α_{ik}, und eine solche verschwindet identisch in den Variablen α_{ik}, falls sie unter der Einschränkung $\alpha_{ki} = -\bar{\alpha}_{ik}$ identisch verschwindet.

Die Analysis situs spielt hier eine entscheidende Rolle; das eigentliche Hindernis für die universelle Anwendung der Hurwitz'schen Methode (die zu dem durchaus falschen Satz führen würde, daß alle linearen Gruppen voll reduzibel sind), liegt auf topologischem Gebiet: die Ungeschlossenheit der meisten Gruppenmannigfaltigkeiten. Um unsern topologischen Satz über die Gruppe $\mathfrak{G}_u$ zu beweisen, stelle ich eine beliebige unitäre Matrix U von der Determinante 1 in der Gestalt dar: $A^{-1}EA$. Darin ist A eine Matrix derselben Gruppe $\mathfrak{G}_u$ und E eine Diagonalmatrix, auf deren

1) Hurwitz, Gött. Nachr. 1897, p. 71. I. Schur, Sitzungsber. d. Preuß. Ak. 1924, p. 189.

2) Vergl. Schur, a. a. O., p. 198.

Hauptdiagonale lauter Zahlen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ vom absoluten Betrag 1 stehen. Das bedeutet: ich führe durch die unitäre Transformation A ein neues Koordinatensystem $e_1, \ldots, e_n$ ein, in welchem U die Normalform E besitzt. Das Produkt $\varepsilon_1 . \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ ist $= 1$. Eine geschlossene Kurve in $\mathfrak{G}_u$ liegt vor, wenn $U = U_\tau$ stetig und periodisch mit der Periode 1 von einem reellen (Zeit-)Parameter τ abhängt. Wende ich jene Darstellung auf U_τ an, so wird das nicht-geordnete System der charakteristischen Wurzeln $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ebenfalls stetig von τ abhängen. Das Gleiche gilt für $A = A_\tau$ nur, solange die ε_i alle voneinander verschieden sind (die Numerierung kann und muß in einem solchen Zeitintervall so eingerichtet werden, daß jede Wurzel ε_i für sich stetig von τ abhängt). Ich darf annehmen, daß Gleichheit mehrerer ε_i nur in endlich vielen Augenblicken eintritt, und dann jeweils nur zwei der charakteristischen Wurzeln einander gleich werden. Ist in einem Moment $\tau = \tau_0$ z. B. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, so wird in der Umgebung dieses Moments die von den beiden Vektoren e_1, e_2 aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit von zwei komplexen Dimensionen stetig von τ abhängen. Ich werde nun die Variation der Kurve, welche U_τ beschreibt, zunächst so durchführen, daß A_τ überhaupt nicht davon betroffen wird, sondern nur das Größensystem $\varepsilon_i(\tau)$ außer von τ stetig von dem Variationsparameter abhängig wird. Sorge ich dafür, daß eine Gleichung wie $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, wenn sie auf der Ausgangskurve im Kurvenpunkte $\tau = \tau_0$ besteht, während der Variation nicht aufhört, für $\tau = \tau_0$ gültig zu bleiben, so wird eine stetige Variation der Ausgangskurve zustande kommen. Es fragt sich, ob ich auf diese Weise die Überführung $\varepsilon_i(\tau) \to 1$ erzwingen kann. Ich setze $\varepsilon_i = e^{2\pi\sigma_i\sqrt{-1}}$. Die σ_i kommen nur mod. 1 in Frage und abgesehen von ihrer Reihenfolge; im Rahmen dieser Unbestimmtheit ist eine einzige Festlegung möglich, welche den Bedingungen

$$(3) \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = 0; \quad \sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \cdots \leqq \sigma_n, \quad \sigma_n - \sigma_1 \leqq 1$$

genügt. Deuten wir die σ als affine Koordinaten in einem $(n-1)$-dimensionalen Raum, welche die Gleichung (3) identisch erfüllen, so stellen die Ungleichungen ein „Dreieck" dar mit der Spitze im Nullpunkt. Auch auf dem Rande des Dreiecks treten keine zwei „äquivalente" σ-Punkte auf; der gegebenen Kurve, welche U_τ durchläuft, entspricht demnach eine stetige geschlossene Kurve im σ-Dreieck. Bei der stetigen Deformation muß ein Punkt dieser Kurve, der auf einer Dreiecksseite liegt, auf ihr verbleiben. Man kann ohne Verletzung dieser Forderung wohl

jene Kurvenpunkte in den Nullpunkt hineinziehen, die auf den vom Nullpunkt ausgehenden Seiten liegen, aber an der gegenüberliegenden Seite $\sigma_n - \sigma_1 = 1$ bleibt die Kurve „hängen". Man kann sie verwandeln in ein mehrfaches Durchlaufen derjenigen Kurve, die aus einem Hin- und Hergang auf der Strecke

$$\sigma_2 = \cdots = \sigma_{n-1} = 0, \quad \sigma_1 = -\sigma, \quad \sigma_n = \sigma \quad (0 \leqq \sigma \leqq \tfrac{1}{2})$$

besteht; weiter kommt man auf diesem Wege nicht. Es ist aber dadurch erreicht, daß U_τ sich allein in einer (mit τ stetig variierenden) linearen Mannigfaltigkeit von zwei komplexen Dimensionen abspielt (wobei eine „Achse" von $n-2$ Dimensionen festbleibt). Indem man nun bedenkt, daß die Gruppe $\mathfrak{G}_u$ in zwei Dimensionen die Zusammenhangsverhältnisse der Kugel im vierdimensionalen Raum besitzt, gelingt die stetige Zusammenziehung auf einen Punkt[1]).

Analog kann man vorgehen, wenn es sich um die Darstellungen der Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ handelt, d. h. derjenigen homogenen linearen Transformationen von der Determinante 1, welche eine gegebene nicht-ausgeartete quadratische Form in sich überführen. Legt man die Form in der Gestalt $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ zugrunde, so besteht der Ausschnitt, über den nach Hurwitz zu integrieren ist, aus den reellen Operationen von $\mathfrak{D}$. Auf diesem Gebilde $\mathfrak{D}_r$ kann man nun freilich nicht jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen; doch gilt dies auf einem gewissen geschlossenen Gebilde $\mathfrak{D}_r^*$, das sich ohne Verzweigung und Grenzen zweiblättrig über $\mathfrak{D}_r$ ausbreitet[2]). So kommt man auch hier dazu, daß die inf. Drehungsgruppe $\mathfrak{d}$ nur Darstellungen gestattet, die in irreduzible zerfallen. Die irreduziblen Darstellungen sind von Cartan angegeben worden.

Endlich noch ein paar Worte über die „Komplexgruppe" $\mathfrak{C}$, welche im $n = 2h$ dimensionalen Raum (mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_h, x_1', \ldots, x_h'$) eine nicht-ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform ungeändert läßt. Legt man die Form in der Gestalt zugrunde

$$\{xy\} = (x_1 y_1' - x_1' y_1) + \cdots + (x_h y_h' - x_h' y_h), \tag{4}$$

so gilt für die Matrizen der zugehörigen inf. Gruppe $\mathfrak{c}$:

---

1) Diesen Beweis habe ich inzwischen noch wesentlich vereinfachen können. (Zusatz b. d. Korrektur.)

2) Der niederste Fall $n = 2$ ist hier natürlich ausgeschlossen. Für $n = 3$, $n = 4$ kann man ja in der Tat sofort Darstellungen angeben, die erst auf einer zweiblättrigen $\mathfrak{D}^*$ über $\mathfrak{D}$ eindeutig sind.

(5) $\begin{array}{|c|c|}\hline \alpha_{ik} & \beta_{ik} \\ \hline \gamma_{ik} & \delta_{ik} \\ \hline \end{array}$ β_{ik} symmetrisch, γ_{ik} symmetrisch; $\alpha_{ki} + \delta_{ik} = 0.$ $[i, k = 1, \ldots, h.]$

Betrachtet man im komplexen Gebiet denjenigen Ausschnitt $\mathfrak{c}_u$, der zugleich die Hermite'sche Einheitsform invariant läßt, so treten die Einschränkungen hinzu:

$$\bar{\alpha}_{ik} + \alpha_{ki} = 0, \quad \beta_{ik} = -\gamma_{ik}.$$

Aber eine von der willkürlichen Matrix (5) der Gruppe $\mathfrak{c}$ linear abhängige Größe verschwindet bereits identisch, wenn sie unter diesen Einschränkungen identisch verschwindet. — U gehörte zu $\mathfrak{C}_u$, wenn es sowohl die Form (4) wie die Hermite'sche Einheitsform ungeändert läßt. In einem geeigneten Koordinatensystem, das aus dem gegebenen durch eine unitäre Transformation A von der Determinante 1 hervorgeht, nimmt U die Normalform E an. Zu jeder charakteristischen Wurzel ε von U gehört eine zweite, welche $= \frac{1}{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$ ist. E läßt diejenige schiefsymmetrische Form

(6) $$S(xy) = \sum_{i,k=1}^{n} s_{ik} x_i \dot{y}_k$$

invariant, in welche (4) durch A übergeht. Variiert man jetzt in dem Ausdruck $U = A^{-1} E A$ unter Festhaltung von A die Diagonalmatrix E so, daß das Gleich- oder Reziprok-sein zweier charakteristischer Wurzeln aufrecht erhalten bleibt, so läßt E immer dieselbe Form S, also U immer dieselbe Form (4) invariant. Darum kommt man auch hier mit der Analysis-situs-Betrachtung auf gleiche Weise wie oben zum Ziel.

Damit ist die Darstellungstheorie für die vier großen Klassen einfacher Gruppen, welche Cartan unterscheidet, (projektive Gruppe, Drehungsgruppe bei geradem und ungeradem n, Komplexgruppe) vollständig begründet. Ein rein algebraischer Beweis der vollen Reduzibilität in diesen Fällen, welcher innerhalb der infinitesimalen Gruppe operiert, bleibt zu wünschen.

Ein weiterer Beitrag zur von Liebermannschen Hemmung.

Von

G. E. Müller.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. November 1924.

P. von Liebermann hat auf Grund gewisser von ihm gemachter Beobachtungen, die später durch Révész bestätigt und vervollständigt wurden, den Satz aufgestellt, daß die Tätigkeit des Stäbchenapparates einen hemmenden Einfluß auf den Zapfenapparat ausübe [1]) Ich habe (a. a. O. S. 147 ff.) gezeigt, daß auch die Versuche, die Kovács und Vogelgesang über die von Fröhlich nicht ganz zutreffend als Empfindungszeit bezeichnete Zeit sowie über die Dauer der primären Empfindung angestellt haben, gewisse Resultate geliefert haben, die sich nur mit Hilfe jener von v. Liebermann angenommenen Hemmung befriedigend erklären lassen. An dieser Stelle soll nun darauf hingewiesen werden, daß ein Gleiches auch von gewissen Ergebnissen der lehrreichen Versuche über das Stereophänomen gilt, welche E. Engelking vor kurzem (Klin. Monatsbl. f. Augenheilk.. 73, 1924, S. 1 ff.) veröffentlicht hat.

Das Stereophänomen wird in einfacher Weise dadurch zur Wahrnehmung gebracht, „daß man mit beiden Augen eine in der Frontalebene schwingende Marke, z. B. ein Uhrpendel, beobachtet, indem man vor ein Auge ein abdunkelndes Filter hält. Die Marke scheint dann aus der Ebene herauszutreten und eine kreisende Bewegung auszuführen." Die Bewegung in der Tiefenrichtung, die das Eigentümliche des Phänomens ausmacht, beruht darauf, daß in dem abgedunkelten Auge die Empfindung etwas später zustande kommt als im freigelassenen Auge. Wird nun dem einen Auge ein farbiger Filter vorgehalten, so kann das entsprechende Kreisen der Marke dadurch zum Verschwinden gebracht, d. h. in eine in der Frontalebene stattfindende Bewegung umgewandelt werden, daß

1) Man vergleiche zu Obigem meine Schrift „Darstellung und Erklärung der verschiedenen Typen der Farbenblindheit" (Göttingen 1924), S. 141 ff.

man das andere Auge durch eine bestimmte Stelle eines Graukeiles (Goldbergkeiles) hindurchsehen läßt. Der Wert der Durchlässigkeit dieser Keilstelle, die ganz allein unter allen Keilstellen bei ihrer Benutzung seitens des anderen Auges den Stereoeffekt verschwinden läßt, ist der Stereowert des farbigen Filters. Je größer also der Stereowert eines Filters ist, desto schneller tritt die Empfindung des mit dem Filter versehenen Auges ein, desto kürzer ist die Empfindungszeit desselben.

Neben der Bestimmung der Stereowerte fand bei den Versuchen von Engelking auch noch eine direkte Bestimmung der Zeitdifferenzwerte statt. Läßt man die Marke mit einem mit einem Filter versehenen und einem frei belassenen Auge beobachten, so kann man, wie Engelking und Poos gezeigt haben, mittels gewisser Formeln aus der Tiefe des Stereoeffektes direkt die Zeitdifferenz der beiderseitigen Empfindungen berechnen, d. h. die Zeit, um welche die Empfindung auf dem einen Auge später eintritt als auf dem anderen. Hierbei wird unter der Tiefe des Stereoeffektes die Größe der Strecke verstanden, um welche eine in der Schwingungsebene der Marke und zwar unterhalb des tiefsten Punktes der Schwingungsbahn der letzteren befindliche zweite Marke in der Medianebene nach vorn gezogen werden muß, damit sie in der Medianebene genau unter der kreisenden Marke zu stehen scheine.

Engelking untersuchte nun unter anderem auch, wie sich bei sinkender Beleuchtung und fortschreitender Dunkeladaptation der Stereowert eines roten Filters verhalte. Es zeigte sich, daß derselbe, in scheinbarem Widerspruch zu dem nach den Erscheinungen des Purkinjeschen Phänomens zu Erwartenden, unter den angegebenen Bedingungen „in gewaltigem Umfange“ anstieg. Engelking und Poos führen dieses überraschende Verhalten darauf zurück, „daß bei diesen schwachen Beleuchtungen das Auge, vor dem der Keil steht, mindestens vorwiegend mit dem Dämmerungsapparat sieht, während das andere Auge, das das rote Filter trägt, mit dem Tagesapparat sieht, da rotes Licht den Dämmerungsapparat praktisch nicht reizt. Steht jetzt vor dem einen Auge das Rotfilter und vor dem anderen der Keil mit der für den Stereotageswert gültigen Stelle, so muß die Empfindungszeit des den Keil tragenden Auges größer werden als die des anderen Auges, d. h. wegen der trägeren ‘Stäbchenreaktion’ auf dem rechten Auge entsteht ein Stereoeffekt, der zum Verschwinden gebracht werden kann, indem eine lichtdurchlässigere Stelle des Keiles vor das rechte Auge gebracht wird. Der Stereowert des Rot ist also gestiegen.„

Diese Erklärung übersieht einen wesentlichen Punkt. Befindet sich beim Helladaptiertsein vor dem einen Auge der Rotfilter und vor dem anderen der Keil mit der für den Stereotageswert gültigen Stelle, so ist die Empfindungszeit für beide Augen dieselbe, und zwar handelt es sich in diesem Falle wesentlich um eine Stereogleichheit von Zapfenerregungen. Wir haben nun keinen Grund anzunehmen, daß, wenn der ganze Vorgang sich auch bei sinkender Beleuchtung und fortschreitender Dunkeladaptation immer nur innerhalb der Zapfenapparate abspielte, alsdann die anfänglich den Wert Null besitzende Differenz zwischen den Empfindungszeiten des Rotauges und des durch die angegebene Keilstelle blickenden Auges in gewaltigem Maße anwachsende positive Werte annehmen müßte. Man würde vielmehr zu erwarten haben, daß, ähnlich wie zwei kleine sich auf der Fovea abbildende und gleich hell erscheinende Felder, von denen das eine rot und das andere blau ist, bei sinkender Beleuchtung und fortschreitender Dunkeladaptation ihre Helligkeitsgleichheit beibehalten, auch die Empfindungszeiten für die beiderseitigen Zapfenerregungen wenigstens annähernd die gleichen bleiben würden. Es ist nun nach den bisherigen Anschauungen, auch bei voller Berücksichtigung der größeren Trägheit der Stäbchenreaktionen, absolut nicht zu verstehen, wie dadurch, daß zu der einen von zwei Zapfenerregungen, denen gleiche Empfindungszeiten entsprechen, noch eine Stäbchenerregung hinzutritt, die Empfindungszeit für die durch die hinzutretende Stäbchentätigkeit bereicherte Erregung verlängert werden könnte. Man kann das hier in Rede stehende Verhalten nur erklären, wenn man annimmt, daß die Stäbchenerregungen hemmend auf die Zapfenerregungen einwirken, daß, je mehr die Dunkeladaptation fortschreitet, desto mehr die Zapfenerregungen des mit dem Graukeil bewaffneten Auges herabgedrückt und durch langsamer ansteigende Stäbchenerregungen ersetzt werden. Die Ansicht von Engelking, daß das bei fortschreitender Dunkeladaptation stattfindende starke Anwachsen des Stereowertes des Rot auf das zunehmende Eingreifen des Stäbchenapparates zurückzuführen sei, ist also ganz zutreffend. Nur hat er verabsäumt, hinzuzufügen, daß eine wesentliche Voraussetzung für die von ihm beobachtete Wirkung dieses Eingreifens der hemmende Einfluß der Stäbchentätigkeit auf den Zapfenapparat ist.

Engelking (S. 23) benutzte auch blaue Filter, und er fand, daß bei fortschreitender Dunkeladaptation der Stereowert des Blau, entgegengesetzt dem Sinne des Purkinjeschen Phänomens, zunächst abnahm und erst dann anstieg. Eine Erklärung dieses Verhaltens gibt er nicht; er bemerkt nur, daß also beim Blau die Verhältnisse

komplizierter lägen. Die Erklärung ist folgende. Bei dem mit dem blauen Filter bewaffneten Auge spielt die Stäbchenerregung im Vergleich zur Zapfenerregung eine größere Rolle als bei dem durch den Graukeil blickenden Auge. Denken wir uns also beim Helladaptiertsein die Stereogleichheit zwischen dem Blau und dem Grau hergestellt, so werden bei der Dunkeladaptation durch die sich entwickelnde Stäbchentätigkeit die Zapfenerregungen zunächst auf der Seite des Blaufilters stärker gehemmt werden als auf der Seite des Graukeiles, so daß zunächst der Stereowert des Blaufilters sich verringert. Indem nun aber allmählich der Zustand eintritt, bei dem der verlängernde Einfluß der Abnahme der Zapfenerregungen auf die Empfindungszeit durch den gegenteiligen Einfluß, welcher der Zunahme der Intensität und Anstiegsgeschwindigkeit der Stäbchenerregungen an sich zukommt, überkompensiert wird, kommt es zu dem zweiten Stadium, in dem die Empfindungszeit auf Seiten des Blauauges, in dem diese Überkompensierung früher und stärker auftritt, die kürzere ist. Auch hier erklärt sich also alles sehr einfach bei Berücksichtigung der von Liebermannschen Hemmung. Das Verhalten des Stereowertes des Blau bei fortschreitender Dunkeladaptation erinnert stark an das von mir (a. a. O. S. 147 ff.) näher besprochene Verhalten, das die Fröhlichsche Zeit bei fortschreitender Dunkeladaptation zeigt. Auch diese Zeit erfährt durch die sich allmählich entwickelnde Stäbchentätigkeit und die von ihr ausgehende Hemmung der Zapfenerregungen zunächst eine Verlängerung, um in einem späteren Stadium der Dunkeladaptation sich wieder zu verkürzen, weil da der Einfluß jener Hemmung gegenüber dem Einflusse, den das Wachstum der Intensität und der Anstieggeschwindigkeit der Stäbchenerregungen an und für sich auf jene Zeit ausübt, ganz zurücktritt.

Das Magnetfeld der Erde und der Sonne.

Von

G. Angenheister.

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung vom 16. Januar 1925.

Durch Beobachtung des Zeemanneffektes auf der Sonne gelang es Hale in Mt. Wilson außer den starken Magnetfeldern in den Flecken (bis 4000 Γ) auch eine allgemeine Magnetisierung der Sonne nachzuweisen[1]. Jedoch liegt dieser Nachweis an der Grenze der Meßbarkeit. Das durch Coelostat und Objektiv entworfene Sonnenbild besaß 43 cm Durchmesser. Das benutzte Michelson'sche Gitter (622 Linien pro mm) liefert im Spektrum dritter Ordnung 4.9 mm für 1 A^0 bei $\lambda = 5000\,A^0$. Die größten Verschiebungen der Linien infolge des Zeemanneffektes betrugen nur 0.003 bis 0.004 mm. Die Breite der Linien selbst war hundertmal größer. Trotz dieser Schwierigkeiten hat sich bei der großen Anzahl (mehrere Tausende) der Aufnahmen und der sorgfältigen Ausmessung derselben doch ein gesichertes Resultat ergeben: nämlich, daß die Sonne ein allgemeines Magnetfeld besitzt, ungefähr von der Form einer magnetisierten Kugel. Die magnetische Axe ist nur 6^0 gegen die Rotationsaxe geneigt und umkreist diese in 31.5 Tagen.

Die Sonne besitzt nun keine einheitliche Rotationszeit; diese nimmt im selben Niveau mit der Breite zu. Außerdem haben tiefere Niveaus eine längere Rotationszeit. Für die umkehrende Schicht beträgt sie am Äquator $26^1/_2$, in 45^0 Breite $30^1/_2$ Tag. Man wird in der Umlaufzeit der magnetischen Axe von $31^1/_2$ Tag wohl die Rotationsdauer eines noch unterhalb der umkehrenden Schicht liegenden Niveaus zu erkennen haben und es ist möglich, daß in diesem tieferen Niveau bereits die Rotationsdauer für alle Breiten konstant ist. Daß auch in niederen Breiten ein tieferes Niveau von etwa 30-tägiger Rotationsdauer besteht, darauf deuten

1) Die betreffenden Arbeiten finden sich in den Jahresberichten und den Contributions des Mt. Wilson Oberservatoriums und in dem Astrophys. Journal.

die großen erdmagnetischen Störungen. Diese treten gleichzeitig mit starken Fleckenentwicklungen in niederen Sonnenbreiten auf. Sie wiederholen sich nun nach Zeiträumen, die ganze Vielfache von sehr nahe 30 Tagen sind. Sie scheinen danach verknüpft zu sein mit Aktionszentren auf der Sonne, die in einem Niveau liegen, das auch in niederen Breiten in 30 Tagen rotiert[1]). Es ist somit sehr wohl möglich, daß ein in etwa 30 bis 31 Tagen rotierendes tieferes Niveau der Träger des Magnetfeldes ist. Der Magnetpol würde dann in diesem Niveau — abgesehen von säkularen Variationen seine Lage unverändert bewahren, also wie bei der Erde starr mit der Rotationsaxe verbunden sein. Ob die noch tiefer liegenden Sonnenmassen mit derselben einheitlichen Geschwindigkeit rotieren, ist unbekannt, jedoch zum mindesten möglich.

Der Zeemanneffekt wurde an verschiedenen Linien gemessen, die der umkehrenden Schicht angehören. Fe 11 Linien; Cr 8; Ni 4; V 5; Ti 1, und an einer besonders geeigneten unbekannten Linie. Die Werte für die Intensität H_P des Feldes am Magnetpol der Sonne ergaben sich für die verschiedenen Linien verschieden hoch, zwischen 10 und 55 Γ. Die verschiedenen Linien gehören nach den Untersuchungen am Flashspektrum zu verschiedenen Niveaus der umkehrenden Schicht. Hale glaubt nun auf Grund einer graphischen Darstellung von H_P als Funktion des Niveaus, daß eine starke Abnahme nach außen hin stattfindet: von 55 Γ für 250 km bis zu 10 Γ für 400 km. Dagegen ist zweierlei geltend zu machen. Erstens kann man auf Grund der graphischen Darstellung die Verteilung der Werte auf die verschiedenen Höhen sehr wohl auch als Streuung um einen Mittelwert ansehen, was in Anbetracht der großen Schwierigkeit der Messung und ihrer hohen Fehlergrenze zu empfehlen wäre. Sodann widerspricht eine solche starke Abnahme des Feldes durchaus der allgemeinen Form des Feldes, das dem einer magnetisierten Kugel ähnlich ist. Auch für eine nur angenähert homogen magnetisierte Kugel ist $\frac{dH}{dr}$ von der Größenordnung $3\frac{H}{r}$; das ergibt eine tausendmal geringere Abnahme als nach der obigen Annahme. Nach einer späteren Untersuchung zeigt das Feld erhebliche Abweichungen von dem einer gleichförmigen magnetisierten Kugel. Wenn hier nicht die gleichen

1) Ad. Schmidt, Meteor. Ztschr. 1920; Astr. Nachr. B 214; G. Angenheister, Meteor. Ztschr. 1922; Terr. Magn. 1922, 1923.

Bedenken über die Genauigkeit geltend zu machen sind, würde die Sonne am Äquator stärker magnetisiert sein.

Das Hauptergebnis der schönen Untersuchungen in Mt. Wilson nämlich, daß das Magnetfeld der Sonne wenigstens in seinem Hauptanteil dem einer gleichförmig magnetisierten Kugel ähnlich ist, könnte vielleicht auf Grund einfacher Vorstellungen verständlich werden. Hierbei gibt die Ähnlichkeit mit dem Magnetfeld der Erde einen Anhalt. Für H_P ist im folgenden der Wert $55\,\Gamma$ angenommen, der nach Hale für die tiefsten zugänglichen Schichten gilt und in der Literatur schlechthin als Stärke des Magnetfeldes der Sonne angegeben wird. Sachgemäßer wäre vielleicht ein Mittelwert, der bei höherer Bewertung der besonders für die Messung geeigneten tiefsten Linie bei $30–40\,\Gamma$ liegen würde.

Das Magnetfeld der Erde und das der Sonne sind einander ähnlich in Form und Richtung. Bei beiden liegt die magnetische Axe — abgesehen von säkularen Variationen — fest gegenüber der Rotationsaxe und ist gegen diese nur wenig geneigt, bei der Erde um $11^1/_2{}^0$, bei der Sonne um 6^0. Bei beiden ist die Richtung der Magnetisierung bezogen auf die Richtung der Rotation die gleiche; nämlich diejenige, die einer Magnetisierung durch einen elektrischen Strom entspricht, der den Breiten entlang entgegen der Rotationsrichtung fließt. Bei Erde und Sonne entspricht die Form des Magnetfeldes — wenigstens der Hauptanteil desselben — dem einer homogen magnetisierten Kugel. Diese Ähnlichkeiten deuten auf eine gleiche Ursache der Magnetisierung von Sonne und Erde. Die Magnetisierung der Volumeneinheit der Erde ist 0.08, die der Sonne 6.6, also 83 mal größer. Die geringe Neigung der magnetischen Axe bei beiden gegenüber der Rotationsaxe legt es natürlich nahe, die Ursache der Magnetisierung in der Rotation zu suchen.

Von den möglichen Ursachen magnetischer Felder kommen für den Magnetismus von Sonne und Erde vor anderen wohl zwei in Betracht: die gyroskopische Wirkung der Rotation auf die Atome ferromagnetischer Körper und die Bewegung elektrischer Raum- und Oberflächenladung durch Rotation.

I. Magneto-mechanische Wirkung der Rotation.

Man hat versucht, den Magnetismus durch Ampèresche Molekularströme zu erklären. In den Eisenatomen bewegen sich die Elektronen in geschlossenen Bahnen. Nimmt man eine solche Bahn

kreisförmig an, so ist ihr magnetisches Moment

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} e r^2 \omega.$$

Da das Elektron Masse besitzt, ist das Atom ein Rotator, dessen mechanisches Impulsmoment

$$I = m r^2 \omega.$$

Wird ein Körper, der solche Kreisströme besitzt, in Rotation von der Winkelgeschwindigkeit ω' versetzt, so erfährt jeder Rotator (Elementarmagnet) ein Drehmoment

$$\mathfrak{d} = -2 \frac{m}{e} \mathfrak{M} \omega',$$

das seine Axe parallel zur Drehaxe des Körpers zu stellen sucht. Dadurch wird eine Magnetisierung des Körpers erzeugt. Wird derselbe Körper einem Magnetfeld von der Stärke $\mathfrak{H}$ unterworfen, so wirkt auf jeden Elementarmagneten ein Drehmoment

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{M} \mathfrak{H}.$$

Wenn das Magnetfeld die Intensität besitzt

$$\mathfrak{H} = -2 \frac{m}{e} \omega' = -4\pi \frac{m}{e} n,$$

wo n die Umlaufzahl pro Sekunde ist, so erfährt der Elementarmagnet in beiden Fällen das gleiche Drehmoment. Die magnetisierende Wirkung für eine Umdrehung pro Sekunde ist also der magnetisierenden Wirkung des Feldes

$$\mathfrak{H} = -4\pi \frac{m}{e}$$

äquivalent. Die experimentelle Prüfung durch Barnet[1]) ergab rund die Hälfte des erwarteten Effektes. Für $\frac{\mathfrak{H}}{n}$ ergab sich -3.1×10^{-7} statt -7.1×10^{-7} und als Intensität der Magnetisierung $\mathfrak{J} = 1.5 \times 10^{-6}$. Barnet benutzte Stäbe. Sieht man davon ab, daß für Stäbe ein größerer Effekt zu erwarten ist als für Kugeln, so würde sich unter sonst gleichen Verhältnissen für eine Kugel von der Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Erde ergeben

$$\mathfrak{J} = 1.7 \times 10^{-11}.$$

Die Beobachtung ergibt für die Erde

$$\mathfrak{J} = 8 \times 10^{-2}.$$

1) S. J. Barnet, Phys. Rev. 1915.

Dieser Effekt ist somit für die Magnetisierung der Erde quantitativ nicht ausreichend. Die Richtung der Magnetisierung durch Rotation ist dieselbe wie die Magnetisierung durch einen elektrischen Strom, der entgegen der Rotationsrichtung fließt. Die Richtung der magnetischen Axe der Erde und Sonne ist also dieselbe, wie sie zu erwarten ist, wenn die Magnetisierung durch diese gyroskopische Wirkung der Rotation entstanden wäre. Die bisherigen Überlegungen gelten für die tatsächlichen Verhältnisse, daß die Elementarmagnete nicht frei drehbar sind. Zusammenstöße und das entmagnetisierende Feld verhindern die Sättigung. Falls diese Wirkungen zu vernachlässigen wären, würde von der Größe der Rotationsgeschwindigkeit nicht die Intensität der Magnetisierung, sondern nur die Zeit abhängen, die bis zur Sättigung verfließt, und selbst kleine Geschwindigkeiten würden auf die Dauer zur Sättigung führen. Die Elementarmagnete im Sonnen- und Erdinnern sind sicherlich nicht freibeweglich. Sind die Widerstände, die sie im Erd- und Sonneninnern finden, von gleicher Größe, so ist die Magnetisierung durch Rotation proportional mit der Winkelgeschwindigkeit, für die Sonne also 31,5 mal kleiner als für die Erde. Die beobachtete tatsächliche Magnetisierung der Sonne ist aber 83 mal größer.

Die Beobachtung ergibt also einen 2600 fach größeren Wert für $\frac{\mathfrak{J}_s}{\mathfrak{J}_e}$ als die Theorie. Eine Annahme, daß der prozentuale Eisengehalt der Sonne vielmals größer sei als der der Erde, ist nicht gut möglich, da die Erde schon zum weitaus größten Teil aus Eisen besteht. Die obige Theorie der gyrostatischen Wirkung trifft somit auf große Bedenken. Eine Magnetisierung durch Rotation, die allein von der Winkelgeschwindigkeit abhängt, genügt nicht der Tatsache, daß die Sonne vielmals stärker magnetisiert ist als die Erde. Man muß eine Ursache suchen, in der sich die vielmals größere Sonnenmasse stärker geltend macht.

II. Bewegung elektrischer Ladung durch Rotation.

Die Magnetisierung von Sonne und Erde sei durch Rotation einer Ladung zustande gekommen. Es mögen Raum- und Oberflächenladungen vorhanden sein, deren totale Summe gleich null sei. Diese letztere Annahme ist notwendig. Würde man annehmen, daß das Magnetfeld der Erde nur durch die Rotation einer Oberflächenladung (oder Raumladung) entstände, so müßte ein elektrostatisches Außenfeld an der Erdoberfläche vorhanden sein, und zwar 10^9 mal stärker als das aus luftelektrischen Messungen be-

kannte. Ist aber die Gesamtladung (Raum- und Oberflächenladung) null, so besteht kein Außenfeld. Das durch Rotation entstehende Magnetfeld besitzt bei passend gewähltem Vorzeichen der Ladung, dann auch sowohl die Form wie die Richtung des beobachteten erdmagnetischen Feldes.

Für eine gleichförmige Oberflächenladung $-\sigma$ ist der durch Rotation entstehende Strom $i = -\sigma R \omega \cos\varphi = -\mathfrak{J}\cos\varphi$. Das magnetische Potential der Kugel V_σ in einem außerhalb gelegenen Punkt r, φ ist dann

$$V_\sigma = \frac{4\pi R^3 \mathfrak{J} \sin\varphi}{3r^2} = -\frac{4\pi R^4 \sigma \omega \sin\varphi}{3r^2} = -\frac{S R^2 \omega \sin\varphi}{3r^2},$$

wo S die gesamte Oberflächenladung bezeichnet. Für eine gleichförmige Raumladung ϱ ist das magnetische Potential

$$V_\varrho = \int_{R=0}^{R=R} V_\sigma dR = \frac{4\pi R^5 \varrho \omega \sin\varphi}{15 r^2} = \frac{Q R^2 \omega \sin\varphi}{5r^2},$$

wo Q die gesamte Raumladung ist. Das magnetische Potential an der Oberfläche der Kugel ist dann

$$V = V_\sigma + V_\varrho = \omega \sin\varphi\left(\frac{Q}{5} - \frac{S}{3}\right) = -\frac{2}{15} Q \omega \sin\varphi,$$

da $Q - S = 0$. Somit ergibt sich, da $V = \frac{\mathfrak{M}}{R^2}\sin\varphi$

$$(1) \qquad Q = -\frac{15\mathfrak{M}}{2\omega R^2} = -\frac{10\pi R \mathfrak{J}}{\omega}.$$

Sind Q_s und Q_e die Raumladungen auf der Sonne und Erde, so wird

$$\frac{Q_s}{Q_e} = \frac{R_s \mathfrak{J}_s \omega_e}{R_e \mathfrak{J}_e \omega_s}.$$

Da R, $\mathfrak{J}$ und ω für Sonne und Erde bekannt sind, so läßt sich $\frac{Q_s}{Q_e}$ berechnen. Für $\mathfrak{J}_s$ und $\mathfrak{J}_e$ sind die Werte zu setzen, die sich aus dem um die Rotationsaxe symmetrischen Anteil des Magnetfeldes ergeben, 6.6 und 0.07; für ω_s der Wert, der 31.5 Tagen entspricht. Es ist dann $\frac{Q_s}{Q_e} = 2.9 \times 10^5$. Das ist sehr nahe gleich dem Verhältnis der Massen von Sonne und Erde. Dies ist nach der Beobachtung $\frac{m_s}{m_e} = 3.3 \times 10^5$. D. h. die totalen Raumladungen von Sonne und Erde verhalten sich wie ihre Massen; oder die Raumladungen der Masseneinheit sind einander gleich. Die elek-

trischen Raumdichten werden also nicht erst durch die Zentrifugalkräfte geweckt, sondern sind unabhängig davon vorhanden. Die elektrischen Raumdichten für Sonne und Erde ergeben sich zu $\varrho_s = 4 \times 10^{-15}$ und $\varrho_e = 18 \times 10^{-15}$ E. M. E. Es ist dann $\frac{\varrho_s}{\varrho_e} = 0.235$ also nahe gleich dem Verhältnis der Dichten, das nach der Beobachtung gleich 0.25 ist.

Man kann Gleichung (1) auch schreiben:

$$-\frac{Q}{3m} = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{2}{5} m \omega R^2} = \frac{\mathfrak{M}}{I}.$$

Bei gleicher Raumladung der Masseneinheit $\frac{Q}{m}$ für Sonne und Erde gilt dann

$$\frac{\mathfrak{M}_s}{\mathfrak{M}_e} = \frac{I_s}{I_e}.$$

Die magnetischen Momente von Sonne und Erde sind proportional den mechanischen Drehimpulsen. Die Rechnung ergibt für

$$\frac{I_s}{I_e} = 1.24 \times 10^8,$$

die Beobachtung für

$$\frac{\mathfrak{M}_s}{\mathfrak{M}_e} = 1.10 \times 10^8;$$

nimmt man für H_P auf der Sonne den Wert $35\,\Gamma$, so ist

$$\frac{\mathfrak{M}_s}{\mathfrak{M}_e} = 0.7 \times 10^8.$$

Man muß darnach annehmen, daß die Magnetisierung der Volumeneinheit proportional ist dem mittleren Drehimpuls, den die Volumeneinheit erfährt.

Es sind bei der Berechnung homogene Dichten für Sonne und Erde angenommen. Dies ist nicht zutreffend. Für die Erde sind aus seismischen Beobachtungen Anhalte für die Dichteverteilung im Inneren gegeben. Für die Sonne fehlen solche. Doch wird man nicht allzuweit fehlgehen, wenn man dort ähnliche Dichtezunahme zum Innern hin annimmt. Die tatsächliche Abweichung von dieser Annahme mag die obigen Unterschiede zwischen Beobachtung und Berechnung veranlaßt haben. Sollte die Theorie sich als richtig erweisen, so würde das magnetische Moment ebenfalls einen Beitrag zum Studium der Dichteverteilung im Innern der Sonne und Erde liefern. Eine experimentelle Prüfung der Theorie wird schwierig sein, da für die im Laboratorium her-

stellbaren Drehimpulse die zu erwartende Magnetisierung sehr gering ist ($H = 10^{-7}\,c.g.s$), doch sind solche Versuche geplant. Dagegen wäre es aussichtsvoll, an Sternen das obige Gesetz zu prüfen, wenn es gelänge, den Zeemanneffekt bei ihnen nachzuweisen. Vorausgesetzt ist dabei, daß man aus der Veränderlichkeit gewisser Sterne auf ihre Rotationsdauer schließen kann, und ihre Masse bekannt ist.

Auf dem Jupiter sind magnetische Feldstärken von der Größe der auf der Sonne beobachteten zu erwarten; doch fehlt das Eigenspektrum.

Untersuchungen aus dem Allgemeinen Chemischen Laboratorium der Universität Göttingen.

Über die Herzgifte der Digitalispflanze und über verwandte Verbindungen.

Von

A. Windaus.

Vorgelegt in der Sitzung vom 16. Januar 1925.

In den letzten Jahren habe ich mich mit den pflanzlichen Giftstoffen, die eine charakteristische und spezifische Wirkung[1]) auf das Herz besitzen, beschäftigt; unter ihnen sind die Digitalis-Stoffe die wichtigsten. Therapeutisch verwendet werden Präparate aus dem Samen und vor allem solche aus den Blättern von Digitalis purpurea. In den Blättern finden sich wahrscheinlich etwa vier, in dem Samen vermutlich zwei verschiedene Giftstoffe; die aus dem Samen und den Blättern rein dargestellten Herzgifte sind untereinander verschieden[2]). Aus den Samen lassen sich nach Straub[3]) die gesamten wirksamen Stoffe mit kaltem Wasser herauslösen; die so bereitete wäßrige Lösung gibt an Chloroform praktisch kein Herzgift ab; durch ein schwieriges Reinigungsverfahren gelingt es aus dem wäßrigen Extrakt ein charakteristisches Gift zur Abscheidung zu bringen, das Digitalinum verum, das außer in Chloroform nunmehr auch in Wasser schwer löslich geworden ist; leicht löslich ist es dagegen in Alkohol[4]). In den wäßrigen Mutterlaugen bleibt ein bis jetzt noch nicht rein dargestellter Giftstoff zurück, der als Digitaleïn bezeichnet worden ist[5]).

---

1) Sluyterman, Zeitschr. f. Biologie **57**, 112 (1911).

2) Die gegenteiligen Behauptungen von Cloetta und Keller sind unzutreffend.

3) Arch. f. exper. Path. u. Pharm. **80**, 52 (1916).

4) S. besonders Kiliani, Arch. d. Pharmaz. **230**, 250 (1892). Ber. **31**, 2460 (1898), Arch. d. Pharmaz. **252**, 26 (1914). Literaturzusammenstellung Ber. **51**, 1613. Anmerkung 1 (1918).

5) S. dazu Arch. d. Pharmaz. **237**, 459 (1899).

Aus den Blättern wird nach Straub's Arbeiten mit kaltem Wasser nur etwa $^2/_3$ bis $^3/_4$ der vorhandenen Giftmenge extrahiert, der Rest läßt sich nur mit verdünntem Alkohol herauslösen[1]). Der wäßrige Extrakt enthält ein Gemisch von Giftstoffen, etwa die Hälfte geht beim Ausschütteln mit Chloroform in dieses über, die andere Hälfte bleibt in der wäßrigen Lösung zurück. Dieses letztere Material, über das nichts Sicheres bekannt ist, wird ebenfalls als Digitaleïn bezeichnet[2]). Der in den Chloroformextrakt übergehende Anteil ist von Kraft[3]) als Gitalin bezeichnet worden; er ist nach Kiliani's Untersuchungen[4]) ein Gemenge. Nach den Angaben der Literatur scheint er therapeutisch recht wertvoll zu sein und hat darum das besondere Interesse der Pharmakologen und Ärzte erregt. Vom Standpunkt des Chemikers muß aber gesagt werden, daß kein Beweis dafür erbracht ist, daß die Gitalinfraktion auch nur in der Hauptsache aus einer chemisch reinen, einheitlichen Substanz besteht, daß vielmehr das Gegenteil sehr wahrscheinlich ist. Durch Behandeln mit siedendem Wasser hat Kraft aus dem „Gitalin“ einen sehr schwer löslichen Stoff zur Abscheidung gebracht, den er als ein „Anhydro-gitalin“ auffaßt. Auch durch indifferente Lösungsmittel und bei niedriger Temperatur läßt sich aus dem „Gitalin“ in wechselnder Ausbeute ein kristallisierter Anteil abtrennen, der fast unlöslich in Wasser, Alkohol und Chloroform ist und für den ich an Stelle des irreführenden Namens Anhydrogitalin den Namen Gitoxin wähle. Vielleicht ist das Gitoxin identisch mit Nativelle's „Digitine“ oder „substance inerte“. Der überraschende Befund, daß aus dem in kaltem Wasser und Chloroform leicht löslichen amorphen „Gitalin“ das in Wasser und Chloroform annähernd unlösliche Gitoxin darstellbar ist, hat zu der Vermutung geführt, daß das Gitoxin gar nicht als solches in der „Gitalin-fraktion“ vorhanden sei, sondern ein Zersetzungsprodukt einer unbeständigen, thermolabilen Muttersubstanz sei. Mir erscheint eine eigentliche Spaltung oder Hydrolyse des „Gitalins“ beim Umkrystallisieren aus Chloroform-Äther ebenso wenig wahrscheinlich wie eine intramolekulare Wasserabspaltung. Wohl aber halte ich es für möglich, daß das Gitoxin in der Gitalin-fraktion zunächst kolloidal gelöst ist und während der Reinigung eine Änderung der Teilchengröße und dadurch eine Änderung der Löslichkeit erfährt. Es ist auch nicht ausge-

---

1) Arch. f. exper. Path. u. Pharm. **80**, 52 (1916).
2) Arch. d. Pharmaz. **237**, 464 (1899).
3) Arch. d. Pharmaz. **250**, 118 (1912).
4) Arch. d. Pharmaz. **251**, 562 (1913), **252**, 13 (1914), Ber. **48**, 334 (1915).

schlossen, daß das Gitoxin mit irgend welchen Bestandteilen der Gitalin-fraktion leicht lösliche, lockere Anlagerungsverbindungen bildet, die beim Behandeln mit gewissen Lösungsmitteln in ihre Bestandteile zerfallen.

Sehr wenig wissen wir noch über die anderen Herzgifte, die in der Gitalin-fraktion stecken. Eines davon ist dem unten zu erwähnenden Digitoxin zum Verwechseln ähnlich und ist wohl häufig mit ihm verwechselt worden; es scheint sich vor allem dadurch vom Digitoxin zu unterscheiden, daß es aus verdünntem Alkohol mit 12 % Wasser krystallisiert; eine Untersuchung dieses Stoffes wäre sehr erwünscht.

Aus den mit kaltem Wasser erschöpften Blättern löst Alkohol noch ein weiteres Herzgift heraus, für das sich der Name Digitoxin eingeführt hat. Zuerst hat augenscheinlich Nativelle diesen Stoff in Händen gehabt und ihn als „Digitaline crystallisée" bezeichnet; später ist er von Schmiedeberg[1]), von Kiliani[2]) und neuerdings von Cloetta[3]) untersucht worden. Er ist in Wasser sehr wenig, in Chloroform und Alkohol ziemlich leicht löslich.

Wie aus dem Gesagten hervorgeht, ist die Mannigfaltigkeit der Giftstoffe der Digitalispflanze groß, die Untersuchung selbst schwierig. Rein dargestellt sind bisher mit Sicherheit drei wirksame Herzgifte, das Digitalinum verum aus dem Samen, das Digitoxin und das Gitoxin aus den Blättern. Die drei rein dargestellten Herzgifte zeigen in ihrem chemischen Aufbau einen sehr ähnlichen Charakter; sie sind alle drei hochmolekulare Glykoside. Unsere Kenntnisse über die zuckerartigen Bestandteile, in denen die ersten natürlich vorkommenden Desosen[4]) und Methyläther[5]) von Zuckern aufgefunden worden sind, verdanken wir ausschließlich den Arbeiten Kiliani's. Das Digitalinum verum enthält ein Mol. Glukose und ein Mol. Digitalose[6]); die Digitalose ist der Monomethyläther einer Methylpentose, sie hat die Formel $C_7H_{14}O_5$ und vermutlich die Struktur

---

1) Arch. f. exper. Path. u. Pharm. **3**, 16 (1874), s. auch **16**, 162 (1883).

2) Arch. d. Pharmaz. **234**, 273 (1896), **237**, 477 (1899).

3) Arch. f. exper. Path. u. Pharm. **88**, 115 (1920).

4) Bergmann und Mitarbeiter, Ber. **54**, 440 (1921), **55**, 158 (1922), **56**, 1052 (1923).

5) Cymarose (aufgefunden 1915) und Digitalose (als Methyläther nachgewiesen 1916) sind die einzigen in der Natur aufgefundenen Methyläther von Zuckern.

6) Ber. **25**, 2116 (1893), **31**, 2454 (1899); Arch. d. Pharmaz. **230**, 250 (1899). Ber. **49**, 701 (1916), **55**, 90 (1922).

$$\underset{|_________________O________________|}{CH_3\,CH\,OH\,CH\,CH\,OH\,CH\,OCH_3\,CH\,OH}$$

Gitoxin und Digitoxin enthalten wahrscheinlich drei Mol.[1]) Digitoxose $C_6H_{12}O_4$, Digitoxose ist[2]) die Desose einer Methylpentose und besitzt die Strukturformel

$$\underset{|__________O__________|}{CH_3\,CH\,OH\,CH\,CH\,OH\,CH_2\,CH\,OH}$$

Alle drei Glykoside sind Laktone, sie sind neutral, aber werden mittels alkolischer Kalilauge zu den Kaliumsalzen von Oxysäuren aufgespalten; ferner enthalten alle drei eine Doppelbindung.

Die Formeln der drei Glykoside habe ich versucht durch Elementaranalysen, Molekulargewichtsbestimmungen, durch Titration und schließlich durch Untersuchung der Spaltstücke zu ermitteln. Digitalinum verum besitzt wahrscheinlich die Formel $C_{37}H_{58}O_{14}$[3]), Digitoxin entweder die Formel $C_{42}H_{66}O_{13}$ oder nach Cloetta $C_{44}H_{70}O_{14}$, Gitoxin ist $C_{42}H_{66}O_{15}$. Die nahe Verwandtschaft zwischen den drei Glykosiden tritt am deutlichsten in Erscheinung beim Vergleich der zuckerfreien Spaltstücke, der Genine oder Aglykone. Das Digitoxin liefert bei der Spaltung das Digitoxigenin, ein einfach ungesättigtes Dioxy-lakton von der Formel $C_{24}H_{36}O_4$[4]); es gibt bei der Behandlung mit wasserentziehenden

---

1) Nach Cloetta (Arch. f. exper. Path. u. Pharm. **88**, 115 (1920) sollen aus dem Digitoxin zwei Mol. Digitoxose und ein Mol. eines Stoffes $C_8H_{14}O_4$ abspaltbar sein; letzterer sublimiert beim Erhitzen des Digitoxins im Hochvakuum und ähnelt in der Art seiner Entstehung und in seinem Verhalten dem Laevoglukosan, das sich beim Erhitzen der β-Glykoside im Hochvakuum bildet. Wahrscheinlich ist auch er ein Anhydro-zucker, vermutlich eine Anhydrodigitoxose $C_6H_{10}O_3$. Ein anderes Produkt, „das Öl", das neben Digitoxose bei der Spaltung des Digitoxins mit verdünnter alkoholischer Salzsäure entsteht und dem Cloetta ebenfalls die Formel $C_8H_{14}O_4$ zuschreibt, ist vermutlich ebenfalls ein Umwandlungsprodukt des Digitoxose, es liefert beim Behandeln mit verdünnter wäßriger Salzsäure viel Digitoxose zurück, es enthält Aethoxyl und ist vermutlich ein unreines Aethyl-halbacetal der Digitoxose.

2) Ber. **31**, 2454 (1898), **32**, 2197 (1899), **34**, 3561 (1901), **38**, 4040 (1905), **41**, 656 (1908), **48**, 339 (1915), **55**, 88 (1922), Arch. d. Pharmaz. **233**, 310 (1895), **234**, 273, 487 (1896), **237**, 458 (1899).

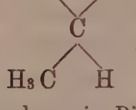
3) Windaus und Bandte, Ber. **56**, 2004 (1923); Windaus, Bohne und Schwieger, Ber. **57**, 1386 (1924).

4) Die richtige Formulierung des Digitoxigenins und Anhydro-digitoxigenins verdankt man der neuen Arbeit über Digitoxin von M. Cloetta (loc. cit.).

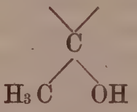
Mitteln leicht 1 Mol. Wasser ab und geht in das zweifach ungesättigte Monooxy-lakton $C_{24}H_{34}O_3$, das Anhydro-digitoxigenin über. Das Digitalinum verum enthält ein einfach ungesättigtes Trioxy-lakton $C_{24}H_{36}O_5$, das als solches nicht faßbar ist, da es sofort zwei Mol. Wasser abspaltet und dabei in ein dreifach ungesättigtes Monooxy-lakton $C_{24}H_{32}O_3$, das Digitaligenin, übergeht. Das Gitoxin endlich liefert ein einfach ungesättigtes Trioxy-lakton $C_{24}H_{36}O_5$, das Gitoxigenin, das mittels konz. Salzsäure zwei Mol. Wasser abspaltet und sich dabei in ein dreifach ungesättigtes Monooxy-lakton $C_{24}H_{32}O_3$, das Dianhydro-gitoxigenin, umwandelt, das mit dem Digitaligenin identisch zu sein scheint. Die in den drei Glykosiden enthaltenen Genine sind also einfach ungesättigte Oxy-laktone von der Formel $C_{24}H_{36}O_4$ und $C_{24}H_{36}O_5$ und geben durch Wasserabspaltung leicht in die mehrfach ungesättigten Oxy-laktone $C_{24}H_{34}O_3$ und $C_{24}H_{32}O_3$ über.

Bei der katalytischen Hydrierung nimmt das Anhydro-digitoxigenin zwei Mol. Wasserstoff auf und gibt ein gesättigtes Oxy-lakton $C_{24}H_{38}O_3$, das Tetrahydro-anhydro-digitoxigenin; in diesem läßt sich die sekundäre Alkoholgruppe zur Ketogruppe oxydieren und das gebildete Produkt $C_{24}H_{36}O_3$ nach der Methode von Clemmensen zu dem gesättigten Lakton $C_{24}H_{38}O_2$ reduzieren. Ganz entsprechend verhält sich das Digitaligenin; es nimmt drei Mol. Wasserstoff auf und liefert ein isomeres gesättigtes Oxy-lakton $C_{24}H_{38}O_3$, das Hexahydro-digitaligenin, das sich auf demselben Wege wie das Digitoxigenin-derivat in ein gesättigtes Lakton $C_{24}H_{38}O_2$ verwandeln läßt. — Das Dianhydro-gitoxigenin endlich nimmt bei der energischen katalytischen Hydrierung drei Mol. Wasserstoff auf und gibt das Lakton $C_{24}H_{38}O_3$, das sich mit dem aus Digitaligenin gewonnenen als völlig identisch erweist. Es ist daher sicher, daß das Gitoxigenin dasselbe Kohlenstoffskelett besitzt wie das Aglykon des Digitalinum verum. Dagegen sind die aus dem Digitoxigenin bereiteten Verbindungen $C_{24}H_{38}O_3$ und $C_{24}H_{38}O_2$ mit den ebenso zusammengesetzten aus Digitaligenin nicht identisch, sondern vermutlich stereoisomer. Indessen erscheint es nicht ausgeschlossen, daß die ursprünglichen Aglykone auch sterisch identisch sind und daß die sterische Verschiedenheit erst im Verlauf der chemischen Umsetzungen künstlich entstanden ist. Das primäre Spaltstück des Digitalinum verum das Trioxy-lakton $C_{24}H_{36}O_5$ enthält eine Hydroxylgruppe an der Stelle, an welcher das Digitoxigenin ein Wasserstoffatom trägt; es ist nicht

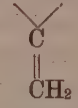
ausgeschlossen, daß der über die ungesättigte Verbindung erfolgende Ersatz der Hydroxylgruppe durch Wasserstoff zu einer sterischen Umlagerung führt, wie es in dem folgenden Schema angedeutet ist:



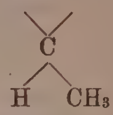
Anordnung im Digitoxigenin und im Lakton $C_{24}H_{38}O_2$ aus Digitoxigenin.



Anordnung im Aglykon von Digitalinum verum.



Anordnung im Anhydro-derivat (Digitaligenin).



Anordnung im Lakton $C_{24}H_{38}O_2$ aus Digitaligenin.

Wie dem auch sei, jedenfalls unterliegt es keinem Zweifel, daß die Digitalisglukoside einen sehr ähnlichen Bau besitzen. Die Aglykone sind einfach ungesättigte Laktone mit 24 Kohlenstoffatomen; sie enthalten, wie sich aus der Formel der gesättigten Laktone ergibt, vier hydrierte Kohlenstoffringe wie das Cholesterin und die Gallensäuren und unterscheiden sich von einander wie die Gallensäuren durch die Zahl ihrer Hydroxylgruppen.

Die Aussicht durch den systematischen Abbau zu einer vollständigen Konstitutionsformel eines Digitalisglykosides zu kommen ist vorläufig gering. Wie die Erfahrung zeigt, sind für Konstitutionsbeweise solcher hochmolekularer Stoffe große Mengen Material notwendig; die Beschaffung ausreichenden Materials von reinen Digitalisglykosiden ist aber derartig kostspielig, daß sie für absehbare Zeit in Deutschland nicht möglich sein dürfte. Vielleicht gelingt es aus einem anderen leichter zugänglichen Material Abbauprodukte zu gewinnen, die mit Abbauprodukten von Digitalis-geninen identisch sind, und auf diesem Wege einen Strukturbeweis zu führen.

Außer den Digitalisglykosiden gibt es im Pflanzenreich zahlreiche andere Herzgifte; ich habe versucht mir einige zu verschaffen und zu prüfen, ob diese einen ähnlichen Bau besitzen wie die Digitalisgifte, ob also der pharmakologischen Zusammengehörigkeit eine chemische Verwandtschaft entspreche oder nicht.

In Nordamerika findet schon lange der Extrakt aus kanadischem Hanf als wirksames Mittel gegen Herzleiden und Wassersucht Verwendung. In der Wurzel von Apocynum cannabinum, Apocynum androsemifolium und venetum scheint nur ein einziges charakteristisches Herzgift vorhanden zu sein, das Cymarin[1]), das als erste die Farbenfabriken vorm. Friedr.

---

1) A. Windaus und L. Hermanns, Ber. 48, 978 (1915).

Bayer & Co. in reinem krystallisierten Zustande dargestellt haben; es besitzt am Frosch eine etwa fünfmal größere Wirksamkeit als Digitoxin. Seine Formel ist $C_{30}H_{44}O_9$; es ist wie die Digitalisgifte ein Glykosid und besitzt wie diese eine Doppelbindung und eine Laktongruppe. Bei der Spaltung zerfällt es in Cymarose und Cymarigenin. Cymarose hat die Formel $C_7H_{14}O_4$ und ist der Methyläther eines Zuckers $C_6H_{12}O_4$, sie gibt dieselben Farbenreaktionen wie Digitoxose und ist vielleicht deren Methyläther; von der Digitalose $C_7H_{14}O_5$ unterscheidet sich die Cymarose durch den Mindergehalt von einem Atom Sauerstoff. Cymarigenin ist ein einfach ungesättigtes Lakton von der Formel $C_{23}H_{32}O_6$, es enthält außer der Laktongruppe drei Hydroxylgruppen und eine Ketogruppe. Beim Behandeln mit Salzsäure spaltet es zwei Mol. Wasser ab und liefert ein Dianhydro-cymarigenin $C_{23}H_{28}O_4$. An dieses kann man drei Mol. Wasserstoff anlagern und weiter die Carbonylgruppe durch die Methylengruppe ersetzen. Hierbei erhält man ein gesättigtes Monooxy-lakton $C_{23}H_{36}O_3$, das vier Kohlenstoffringe enthalten muß und nach seiner Formel das nächst niedere Homologe der aus den Digitalis-geninen bereiteten isomeren Monooxy-laktone $C_{24}H_{38}O_3$ darstellt. Nach seinem ganzen Verhalten und nach seiner Formel ist die nahe Verwandtschaft zwischen dem Cymarin und den Digitalisglykosiden nicht zweifelhaft.

Außer dem Cymarin werden Präparate aus Strophantus Kombé und anderen Strophantusarten als Heilmittel geschätzt. Die Samen aus Strophantus Kombé enthalten ein kristallisiertes Glykosid, das in seiner Wirkung qualitativ und quantitativ dem Cymarin sehr ähnlich ist. Das Strophantin Kombé soll die Formel $C_{31}H_{46}O_{11}$ oder $C_{32}H_{48}O_{12}$ besitzen[1]); bei der Spaltung liefert es neben einem noch nicht charakterisierten Zucker das Strophantidin $C_{23}H_{32}O_6$, das sich mit dem Cymarigenin als identisch erwiesen hat[2]) und zur Zeit ausführlich von Jacobs untersucht wird[3]).

Außer Digitalin, Cymarin und Strophantin werden gelegentlich therapeutisch verwendet Präparate aus Scilla maritima, aus Adonis vernalis und auch aus Convallaria majalis; einige weitere Herzgifte wie Antiarin und Ouabain sind durch ihre Verwendung als Pfeilgifte bekannt geworden, aber hiermit ist die

1) W. A. Jacobs, Journ. Biol. Chem. **57**, 569 (1923).

2) Windaus und Hermanns, Ber. **48**, 992 (1915).

3) Journ. Biol. Chem. **54**, 253 (1922), **57**, 553 (1923), **59**, 713 (1924), **61**, 387 (1924).

Zahl pflanzlicher Herzgifte längst nicht erschöpft[1]). Keines ist indessen so gründlich untersucht, daß sich etwas Sicheres über seinen chemischen Bau und über verwandtschaftliche Beziehungen zu den Digitalisglykosiden aussagen ließe.

Dagegen ist ein tierisches Gift, das pharmakologisch zur Digitalisgruppe gehört, durch die Untersuchungen H. Wieland's[2]) genauer bekannt geworden, es ist das in gewissen Hautdrüsen der Kröte (bufo vulgaris) vorkommende Bufotoxin[3]). Das Bufotoxin besitzt die Formel $C_{40}H_{62}O_{11}N_4$; es ist kein Glykosid, sondern ein Ester; die esterartig gebundenen Säuren sind Essigsäure und Suberylarginin; der charakteristische Bestandteil ist ein einfach ungesättigtes Tetraoxy-lakton $C_{24}H_{36}O_6$; allerdings ist das Tetraoxy-lakton als solches nicht zu fassen, es spaltet sehr leicht drei Mol. Wasser ab und gibt ein vierfach ungesättigtes Monooxy-lakton $C_{24}H_{30}O_3$, das Bufotalien; bei der katalytischen Hydrierung addiert dieses vier Mol. Wasserstoff und geht in ein gesättigtes Oxy-lakton $C_{24}H_{38}O_3$ über, das Bufotalan heißt und isomer ist mit den gesättigten Oxy-laktonen aus Digitoxigenin und Digitaligenin. Die Ähnlichkeit zwischen dem Bufotoxin und den Giften der Digitalisgruppe ist also gradezu verblüffend. Von besonderem Interesse ist zudem der nahe Zusammenhang von Krötengift und Gallensäuren, auf den H. Wieland als erster in eindringlicher Weise hingewiesen hat. Die wichtigsten Gallensäuren besitzen die Formeln $C_{24}H_{40}O_4$ und $C_{24}H_{40}O_5$; es sind Oxy-derivate der Cholansäure $C_{24}H_{40}O_2$ und enthalten vier hydrierte Kohlenstoffringe; sie unterscheiden sich durch die Zahl und die Stellung ihrer Hydroxylgruppen von

---

1) Außer Scillain, Ouabain und Antiarin würden die folgenden pflanzlichen Herzgifte einer Untersuchung in der hier angedeuteten Richtung zu unterziehen sein: Oleandrin, Cerberin aus den Samenkernen von Cerbera odollam, Evonymin aus der Rinde von Evonymus atropurpureus, Periplocin aus der Rinde von Periploca graeca, Rabelaisin aus der Rinde von Rabelaisia phillipinensis und Thevetin aus den Fruchtkernen von Thevetia neriifolia.

2) Sitzungsberichte d. Bayerisch. Akadem. d. Wissenschaften **1920**, 329 und Ber. **55**, 1789 (1922).

3) Außer Bufotoxin ist kein tierisches Gift von typischsr Digitalis-Wirkung bekannt geworden; nur beim Wassersalamander soll ein ähnlicher Stoff wie Bufotoxin vorkommen. Straub hat allerdings gefunden, daß aus dem normalen Herzen durch Auskochen mit Wasser ein Stoff extrahiert werden kann, der das Froschherz in Systole zum Stillstand bringt (Biochem. Zeitschr. **28**, 393 (1910)); und C. Hirsch hat die Vermutung ausgesprochen, daß im normalen Herzen Substanzen entstünden, die gleichsam digitalisähnlich wirkten und die Konstanz der Herzleistung garantierten (Deutsche mediz. Wochenschrift **49**, 1173 (1923)).

einander, am meisten verbreitet sind Dioxy-cholansäuren, und Wieland vertritt die Ansicht, daß das Bufotalan $C_{24}H_{38}O_3$ das Lakton einer Dioxy-cholansäure sei, deren eine Hydroxylgruppe sich in γ-Stellung zur Carboxylgruppe befinde.

Auf Grund dieser Untersuchungen wird man sich die Entstehung des Bufotoxins im Organismus der Kröte folgendermaßen vorstellen können: Die Muttersubstanz ist das Cholesterin $C_{27}H_{46}O$, das entweder aus der Nahrung stammt oder auch synthetisch gebildet werden kann. Das Cholesterin geht zunächst in neutrale Oxydationsprodukte, die „Oxy-cholesterine" über und wird dann weiter unter Abspaltung von Aceton zu sauren Oxydationsprodukten, den Gallensäuren, abgebaut; die Cholsäure ist eine Trioxy-cholansäure $C_{24}H_{40}O_5$, der charakteristische Bestandteil des Krötengiftes ist nach Wieland das Lakton einer Penta-oxy-cholensäure, es müssen also in die Cholsäure noch zwei weitere Hydroxylgruppen (eine davon in γ-Stellung) eingeführt und zwei Wasserstoffatome unter Schaffung einer Doppelbindung abgespalten werden; wird dann noch der Laktonring geschlossen und werden zwei Hydroxylgruppen mit Essigsäure und Suberyl-arginin verestert, so ist das Molekül des Bufotoxins (auf dem Papier) fertig gebildet.

Ganz ähnliche Vorgänge werden auch im Pflanzenreich zur Bildung der Herzgifte aus Phytosterinen führen. Einige Zwischenprodukte sind auch hier nachweisbar. Phytosterin-glykoside[1]) kommen weit verbreitet im Pflanzenreich vor, in den neutralen Saponinen finden sich mit Zucker verbunden mehrwertige Alkohole, wohl die ersten Oxydationsprodukte der Phytosterine; in den sauren Saponinen sind als Aglykone die sauren Sapogenine vorhanden, die vielleicht weitergehende Oxydationsprodukte der neutralen Genine darstellen und den Gallensäuren auch pharmakologisch vergleichbar sind. Im Molekül der pflanzlichen Herzgifte finden wir die durch weitere Oxydation gebildeten ungesättigten Oxylaktone, die wir dem charakteristischen Bestandteil des Krötengiftes an die Seite stellen.

---

1) Siehe Biochem. Handlexikon, 10. Band, S. 181.

Druckfehler.

S. 240 Zeile 17 v. o. lies $C_{42}H_{66}O_{14}$ statt $C_{42}H_{66}O_{15}$.

Die Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von

Wilhelm Ackermann.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 16. Januar 1925.

David Hilbert hat in seiner Neubegründung der Mathematik gezeigt, daß sich alle transfiniten Schlußweisen im wesentlichen als Folgerungen aus einem einzigen Axiom gewinnen lassen. Dieses lautet folgendermaßen:

$$A(a) \to A(\varepsilon_a A(a)).$$

Hier bedeutet $A(a)$ eine variable Formel, die die Zahlenvariable a enthält. Jeder Formelvariablen $A(.)$ wird durch dieses Axiom eine bestimmte Zahl $\varepsilon_a A(a)$ zugeordnet. Über dieses $\varepsilon_a A(a)$ wird durch das Axiom nichts weiter ausgesagt, als daß auf $\varepsilon_a A(a)$ die Aussage $A(a)$ zutreffen soll, falls sie überhaupt für ein Ding zutrifft. Entsprechende Axiome haben wir für Funktionen. Sei z. B. f eine variable Funktion einer Zahlenvariablen, so haben wir das Axiom:

$$A(f) \to A\,\varepsilon_f A(f).$$

— Der Widerspruchsfreiheitsbeweis für diese Axiome war in meiner Dissertation (Math. Ann. 93) gegeben worden. — Es ist nun klar, daß dieses genannte Axiom eine enge Beziehung zum Auswahlaxiom hat. Denn fassen wir die mathematischen Formeln inhaltlich auf, so entspricht einer Formel $\mathfrak{A}(a)$ eine bestimmte Menge von Zahlen, einer Formel $\mathfrak{A}(f)$ eine bestimmte Menge von Funktionen. Jedoch können derselben Menge ganz verschiedene Formeln $\mathfrak{A}(a)$, bzw. $\mathfrak{A}(f)$ entsprechen. Infolgedessen ist auch die durch $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a)$ oder $\varepsilon_f \mathfrak{A}(f)$ getroffene Auswahl nicht unabhängig von der Definition der Menge. Um also das volle Auswahlaxiom zu erhalten, brauchen wir noch ein neues Axiom, welches aussagt, daß für Formeln $\mathfrak{A}(a)$, bzw. $\mathfrak{A}(f)$, denen dieselben Mengen entsprechen, auch die zugehörigen ausgezeichneten Elemente

ε gleich sind. — Formalisiert lautet dieses Axiom:

$$(a)(A(a) \rightleftarrows B(a)) \to \varepsilon_a A(a) = \varepsilon_a B(a),$$

bzw. $(f)(A(f) \rightleftarrows B(f)) \to (a) \quad [(\varepsilon_f A(f))(a) = (\varepsilon_f B(f))(a)].$

Beweis der Widerspruchsfreiheit für das Auswahlaxiom.

Es ist mir gelungen, zu zeigen, daß auch nach Hinzufügung dieser neuen Axiome der Formalismus widerspruchsfrei bleibt: der Beweis ist ganz ähnlich dem meiner Dissertation. Ich will zunächst den früheren Beweis kurz erläutern [1]). Ich setze dabei die Grundgedanken der Hilbert'schen Theorie, etwa so, wie sie in Abschnitt I und II meiner Annalenarbeit erläutert sind, voraus.

Es kam bei diesem Beweise darauf an, die nach Herausschaffung der Variablen in der Beweisfigur noch vorhandenen ε zu entfernen, und zwar so zu entfernen, daß sämtliche kritische Formeln (d. h. sämtliche Formeln, die aus den ε-Axiomen durch Einsetzung hervorgehen), in richtige Formeln übergehen. Diese Entfernung der ε geschieht in der Weise, daß die ε_a in ganz bestimmter Weise durch Zahlzeichen und die ε_f durch Rekursionsfunktionen ersetzt werden. Nun ergibt sich, daß wenn man gewisse ε aus der Beweisfigur herausgeschafft hat, unter Umständen wieder viel mehr hereinkommen. Es läßt sich aber zeigen, daß man trotzdem mit der Herausschaffung der ε zu Ende kommt. Dies ist der erste Endlichkeitsbeweis, der geführt wird. Es genügt aber nicht, daß man überhaupt die ε aus der Beweisfigur herausschaffen und so die ganze Beweisfigur auf numerische Formeln reduzieren kann, sondern es sollen sich auch alle kritischen Formeln auf richtige reduzieren.

Nun wird eine Formel von der Gestalt $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}(\varepsilon_a \mathfrak{A}(a))$ richtig, wenn $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a)$ durch ein derartiges Zahlzeichen $\mathfrak{z}$ ersetzt wird, daß $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ richtig ist; wenn also $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a)$ durch ein Beispiel für die Aussage $\mathfrak{A}(a)$ ersetzt wird. Ist aber $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a)$ nicht durch ein Beispiel ersetzt und wird eine kritische Formel von der Gestalt: $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{A}\, \varepsilon_a \mathfrak{A}(a)$ falsch, so muß offenbar $\mathfrak{a}$ ein Beispiel für die Aussage $\mathfrak{A}(a)$ sein, und man kann jetzt $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a)$ durch das gefundene

---

1) In meiner Annalenarbeit habe ich allerdings (S. 9, Anm. bei der Korrektur) noch eine Einschränkung im Gebrauch des ε_f gemacht. Diese Einschränkung läßt sich aufheben, wie bei der ausführlichen Darstellung des Gegenstandes der vorliegenden Arbeit gezeigt werden wird.

Beispiel ersetzen. Man müßte demnach möglichst viel Beispiele als Ersetzungen für die $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a)$ nehmen, solange bis alle kritischen Formeln richtig werden.

Dieser Gedanke ließe sich jedoch in solch einfacher Form nur durchführen, wenn es für jede Formel $\mathfrak{A}(a)$ feststände, ob sich für ein bestimmtes $\mathfrak{z}$ $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ auf eine richtige oder eine falsche Formel reduziert. Dies ist aber im allgemeinen nicht der Fall. Hat z. B. $\mathfrak{A}(a)$ die Gestalt $\mathfrak{K}(a, \varepsilon_b \mathfrak{B}(a, b))$, so hat es erst einen Sinn zu sagen, daß sich ein $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ auf eine richtige oder falsche Formel reduziert, wenn für $\varepsilon_b \mathfrak{B}(\mathfrak{z}, b)$ schon eine Ersetzung festgelegt ist. Von definitiven Beispielen für eine Aussage $\mathfrak{A}(a)$ kann offenbar im allgemeinen keine Rede mehr sein. Dieser Umstand macht ein besonderes und ziemlich verwickeltes Verfahren notwendig, mit Hilfe dessen es aber doch glückt, derartige Ersetzungen für die ε zu finden, daß alle kritischen Formel richtig werden.

Man ersetzt zunächst alle ε durch 0. Wird dann nicht alles richtig, so findet man „Beispiele", die man jetzt als Ersetzungen nimmt. Man nimmt solange Beispiele hinzu, wie es überhaupt geht. Nun kann es aber vorkommen, daß sich eine Ersetzung, die früher ein Beispiel war, jetzt als nicht definitiv herausstellt. Dies kann nur daran liegen, daß ein inneres ε inzwischen seine Ersetzung verändert hat. In diesem Falle macht man Folgendes. Man läßt das betreffende Beispiel fallen und ebenso alle Beispiele, die später als dieses Beispiel gefunden sind. Eine Ausnahme macht nur die Ersetzung für das innere ε, die man beibehält, und ebenso die Ersetzungen für alle ε, die noch weiter innen stehen.

Es wird dann der zweite Endlichkeitsbeweis geführt; es wird gezeigt, daß dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten zu einer Ersetzungsreihe für die ε führt, bei der sich alle kritischen Formeln auf richtige reduzieren.

Dies waren die Grundgedanken des Widerspruchsfreiheitsbeweises meiner Annalenarbeit. Nimmt man nun die neuen Axiome hinzu, welche die Unabhängigkeit der Auswahl von der Definition der Menge postulieren, so modifizieren wir das Verfahren in folgender Weise:

Zunächst verändern wir die Beweisfigur in der Art, daß wir neue kritische Formeln zu den bereits vorhandenen hinzufügen, die wir mit richtig machen. Kommen in der Beweisfigur ε_a vor, die zu den Formeln $\mathfrak{A}(a), \ldots, \mathfrak{G}(a)$ gehören, so fügen wir für $\mathfrak{A}(a)$ die kritischen Formeln hinzu:

$$\mathfrak{A}(\varepsilon_a \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_a \mathfrak{A}(a))$$
$$\mathfrak{A}(\varepsilon_a \mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_a \mathfrak{A}(a))$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{A}(\varepsilon_a \mathfrak{G}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_a \mathfrak{A}(a)),$$

und dasselbe machen wir für die anderen Formeln $\mathfrak{B}(a), \ldots, \mathfrak{G}(a)$. Das Entsprechende gilt für die Formeln $\mathfrak{A}(f)$.

Ferner genügt es jetzt, mit Rücksicht auf die neu hinzugefügten Axiome, nicht, überhaupt Beispiele hinzuzunehmen. Es muß unter den Beispielen, die eine Formel $\mathfrak{A}(a)$ zuläßt, ein bestimmtes ausgezeichnet werden, und zwar so, daß die Auszeichnung für alle äquivalenten Aussagen $\mathfrak{A}(a)$, d. h. für alle Aussagen, welche die gleiche Menge definieren, in gleicher Weise erfolgt. Dies kann in folgender Weise geschehen.

Statt möglichst viel Beispiele überhaupt hinzuzunehmen, nehmen wir jetzt immer die kleinsten Beispiele hinzu. D. h. hat man ein Beispiel $\mathfrak{z}$ für eine Aussage $\mathfrak{A}(a)$ gefunden, so untersuchen wir, ob es nicht unter den Zahlzeichen, die kleiner sind als $\mathfrak{z}$, ebenfalls Beispiele für die Aussage $\mathfrak{A}(a)$ gibt und nehmen dann das kleinste Beispiel. — Dieser Gedanke läßt sich auch auf die ε_f übertragen. Es sind ja (inhaltlich gesprochen) die durch Rekursion definierten Funktionen bis zu irgend einem Typ abzählbar. Es läßt sich auch ein anschauliches Verfahren angeben, wie man, falls eine bestimmte Rekursionsfunktion als Zeichenkombination vorliegt, zu allen gelangt, die in der Abzählung vorangehen. Hat man also ein Beispiel für eine Aussage $\mathfrak{A}(f)$ in Gestalt einer Rekursionsfunktion gefunden, so kann man auch ein Beispiel finden, das in der Abzählung zuerst steht. — Im übrigen ist dieses neue Verfahren, was das Aufgeben von gefundenen Beispielen betrifft, ganz so wie das frühere. Ganz ähnlich wie früher läßt sich auch der Endlichkeitsbeweis führen; man gelangt nach endlich vielen Schritten zu einer Ersetzungsreihe für die ε, bei der alle kritischen Formeln von der Gestalt $\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_a \mathfrak{A}(a))$ und $\mathfrak{A}(\varphi) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon_f \mathfrak{A}(f))$ richtig sind, und zugleich alle Beispiele, die man als Ersetzungen gebraucht, die kleinsten sind. Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß man die Beweisfigur um gewisse kritische Formeln vermehrt hat, läßt sich dann zeigen, daß bei der letzten Ersetzungsreihe auch alle kritischen Formeln von der Gestalt:

$$(a)(\mathfrak{A}(a) \rightleftarrows \mathfrak{B}(a)) \rightarrow \varepsilon_a \mathfrak{A}(a) = \varepsilon_a \mathfrak{B}(a)$$
$$(f)(\mathfrak{A}(f) \rightleftarrows \mathfrak{B}(f)) \rightarrow (a)[(\varepsilon_f \mathfrak{A} f)(a) = (\varepsilon_f \mathfrak{B} f)(a)]$$

in richtige Formeln übergegangen sind.

Damit ist die Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms gezeigt.

Die exakte Durchführung dieses Gedankens wird in den Math. Annalen erfolgen. Es sei hier nur noch bemerkt, daß man jetzt auch imstande ist, die Widerspruchsfreiheit eines neuen Gleichheitsaxioms zu zeigen, das beim Aufbau der Hilbert'schen Theorie gebraucht wird. Im einfachsten Falle lautet dieses Axiom:

$$(a)(f(a) = g(a)) \rightarrow A(f) \rightarrow A(g);$$

es ist das Analogon zu dem früher eingeführten Axiom

$$a = b \rightarrow A(a) \rightarrow A(b).$$

Entsprechende Axiome kann man auch für Funktionenfunktionen aufstellen.

Der Beweis der Widerspruchsfreiheit ist sehr einfach. Nach Herausschaffung der Variablen geht dieses Axiom über in:

$$(a)(\varphi(a) = \chi(a)) \rightarrow \mathfrak{A}(\varphi) \rightarrow \mathfrak{A}(\chi).$$

Hier enthält $\mathfrak{A}(a)$ außer a keine Zeichen für Variable.

Jede derartige Formel läßt sich aber aus den übrigen Axiomen, unter wesentlicher Benutzung unserer neuen Axiome:

$$(a)(A(a) \rightleftarrows B(a)) \rightarrow \varepsilon_a A(a) = \varepsilon_a B(a)$$
$$(a)(A(f) \rightleftarrows B(f)) \rightarrow (a)[(\varepsilon_f A f)(a) = (\varepsilon_f B f)(a)]$$

usw. beweisen. D. h. hat man einen Beweis mit numerischer Endformel, bei dem das Axiom

$$(a)(f(a) = g(a)) \rightarrow A(f) \rightarrow A(g)$$

benutzt wird, so kann die numerische Endformel auch ohne Benutzung dieses Axioms bewiesen werden. Das heißt aber: das Axiom

$$(a)(f(a) = g(a)) \rightarrow A(f) \rightarrow A(g)$$

ist widerspruchsfrei.

Über die Beschaffenheit des Erdinnern.

Von

E. Wiechert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 16. Januar 1925.

Im Jahre 1897 wurde in den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen eine Arbeit von mir über die Massenverteilung im Innern der Erde veröffentlicht. Bis dahin nahm man im Anschluß an Legendre meist an, die Dichte innerhalb der Erde variiere stetig von der Oberfläche bis zum Mittelpunkt entsprechend einer wachsenden Verdichtung der Substanz des Erdkörpers durch den Druck. Dieser Anschauung setzte ich aus physikalischen Gründen die andere entgegen, der Druck sei nicht genügend, eine so große Dichteänderung zu erklären, wie es hier nötig wurde, die Dichteunterschiede seien vielmehr auf Materialverschiedenheiten zurückzuführen.

Für die Durchführung dieser Hypothese standen folgende Beobachtungsdaten zur Verfügung: Die mittlere Dichte der Erde, für welche ich den Wert 5,58 annahm. Die Dichte des Gesteinmantels der Erde, auf dem wir leben; den Beobachtungen entsprechen hier Dichten zwischen 3,0 und 3,4. Die Abplattung der Erde, für welche ich 1/297 bis 1/296 annahm. Präzession und Nutation.

Der Vergleich von Präzession und Nutation mit der Abplattung der Erde ergab den Schluß, daß die Schichten im Innern der Erde sehr nahe entsprechend dem hydrostatischen Gleichgewicht, oder wie man heute zu sagen pflegt, entsprechend der „Isostasie“ gelagert seien. So setzte ich denn für meine weiteren Rechnungen Isostasie voraus. Dann war es aus den genannten Beobachtungsdaten möglich, zwei Daten über die Beschaffenheit des Erdinnern zu berechnen. Dies ins Auge fassend, versuchte ich es mit der Hypothese einer „zweiteiligen Erde“, indem ich voraussetzte, die Erde bestände aus einer Metallkugel nahezu konstanter Dichte, die von einem Steinmantel ebenfalls nahezu konstanter Dichte umgeben sei. Da die Dichte des Steinmantels mit 3,0—3,4 angenommen

wurde, konnte der Radius der Metallkugel und deren Dichte berechnet werden. Die Rechnung ergab für die Dicke des Steinmantels, also für die Tiefe bis zum Kern, 1200—1600 km und für die Dichte des Kernes einen Wert zwischen etwa 8,0 und 8,4. Hiernach erschien der Metallkern im wesentlichen als etwas verdichtetes Eisen. Da dieses von vornherein zu erwarten war, entstand der Eindruck, die Hypothese der zweiteiligen Erde bewähre sich vortrefflich.

Seit jener nun bald 30 Jahre zurückliegenden Zeit ist eine Fülle neuer Beobachtungen gewonnen worden. Insbesondere ist es der Seismik gelungen, uns weitgehende neue Aufschlüsse über die Beschaffenheit des Erdinnern zu bieten. Für das vorliegende Problem kommt vor allem in Betracht, daß durch Untersuchung von Schattengrenzen für die Wellen, welche von einem Erdbebenherd in die Ferne laufen, es möglich gewesen ist, Unstetigkeitsflächen im Innern der Erde zu erkennen. Solche Unstetigkeitsflächen wurden in etwa 1200, 1700, 2450 und 2900 km Tiefe angenommen. Die Grenzflächen 1700 und 2450 sind in den Beobachtungen nur wenig angedeutet und erklären sich vermutlich nicht durch Sprünge in der Beschaffenheit des Materials. Dem gegenüber heben sich die Grenzflächen in 1200 und 2900 km Tiefe sehr stark heraus. Die Tiefenzahl 1200 km kann höchstens ± 50 km unsicher sein. Bei der Tiefenzahl 2900 km, auf zwei Wegen bestimmbar, beträgt der Fehler allerhöchstens ± 200 km. So ist denn jetzt mit einer dreiteiligen Erde zu rechnen.

Da die Radien bestimmt sind, kann aus den Beobachtungsdaten nunmehr die Dichte der beiden tieferen Teile, der „Zwischenschicht“ und des „Kernes“ berechnet werden. Ich benutze zur Bezeichnung des Kernes gerne den Ausdruck „Samoa-Kern“, weil sein Vorhandensein zuerst durch die Beobachtungen jener geophysikalischen Station auf den Samoa-Inseln sichergestellt wurde, welche von der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften im Beginn unsres Jahrhunderts errichtet worden ist. Der Feststellung der Dichten von Zwischenschicht und Kern unterzog sich mein Schüler W. Klußmann mit Geschick in seiner Doktorarbeit („Über das Innere der Erde“), die 1915 veröffentlicht wurde. Bei Annahme einer Dichte für den Mantel von 3,0 und 3,6 fand er für die Dichte der Zwischenschicht 5,4—7,2 und für die Dichte des Kernes 8,3—9,6. Als Klußmann seine Arbeit durchführte, war die Grenzfläche in 2900 km Tiefe noch nicht gefunden; so rechnete er mit einer Tiefe von 2450 km für den Beginn des „Samoa-Kernes“. Unter solchen Umständen ist es nötig, seine Rechnung jetzt zu wieder-

holen. Dem habe ich mich unterzogen. Über die Einzelheiten der Rechnungen selbst gedenke ich an anderer Stelle (Zeitschrift für Geophysik) in einer ausführlicheren Darstellung Mitteilung zu machen. Hier beschränke ich mich auf die Angabe einiger Resultate.

Für die Dichte des Steinmantels nehme ich weiterhin 3,4 an, weil dieses die mittlere Dichte des Mondes ist und man voraussetzen darf, daß der Mond sich einstmals als ein Teil des Steinmantels von der Erde abgelöst hat. Für die Abplattung verwende ich den Wert $a = 1/296{,}7$, welcher von R. Helmert 1915 als Ergebnis der Schweremessungen angegeben wurde. Für die mittlere Dichte der Erde nehme ich entsprechend den Messungen der Gravitationskonstanten $\delta_m = 5{,}527$ an. Die Werte:

$$a = 1/296{,}7, \quad \delta_m = 5{,}527, \quad \delta_1 = 3{,}4$$

ergeben nach meinen neuen Rechnungen:

$$\delta_2 = 6{,}39, \quad \delta_3 = 9{,}63,$$

wobei δ_1, δ_2, δ_3 die Dichten von Steinmantel, Mittelschicht und Kern sind.

Von außerordentlicher Bedeutung für unser Problem ist, daß die physikalische Chemie Hilfe geleistet hat. Nimmt man an, daß die Erde einmal im ganzen Inneren flüssig gewesen ist, so muß sich ein physikalisch-chemisches Gleichgewicht zwischen den verschiedenen Teilen hergestellt haben. Es ist dann nach den Erfahrungen der physikalischen Chemie entsprechend der Dreiteilung, die man bei Schmelzflüssen in Hochöfen bemerkt, auch eine Dreiteilung der Erde zu erwarten (V. W. Goldschmidt). G. Tammann hat eine genauere Feststellung über die Mischungsverhältnisse der Stoffe vorgenommen. Dies ist möglich, da durch Untersuchung amerikanischer Geophysiker die mittlere Beschaffenheit der Erdrinde uns mit großer Genauigkeit bekannt ist (H. S. Washington). Es ergibt sich nach Tammann, daß die Zwischenschicht vornehmlich aus

$$FeS, \; Fe_3P, \; FeO, \; Fe, \; SiO_2$$

gemischt ist. Im Kern sind anzunehmen

Fe 88 %, Ni 8 %, (Fe, S, O) 3 %, edlere Metalle 1 %.

Diesen Angaben der physikalischen Chemie entsprechen die errechneten Dichten, welche Erdmessung und Seismik ergeben haben, vortrefflich. Die Dichte von Magneteisen (Fe_3O_4) wird zu 4,96—5,4 angegeben, die Dichte von Schwefeleisen (FeS) zu 4,75—5,04. Da noch etwas freies Eisen zugemischt sein soll, zeigt die errech-

nete Zahl 6,39 an, daß die Zwischenschicht nur wenig komprimiert ist, vielleicht im Verhältnis von 5 : 6. Reines Eisen hat die Dichte 7,88, Nickel 9,0. Auch der Metallkern scheint darnach etwas verdichtet, auch etwa im Verhältnis 5 : 6.

Um recht einzusehen, was diese Harmonie der Ergebnisse bedeutet, muß man bedenken, welche verschiedenartigen Untersuchungen zu ihnen geführt haben: Die Bestimmung der Gravitationskonstanten zusammen mit den Messungen der Schwerkraft und der Größe der Erde ergaben die mittlere Dichte. Die Seismik lehrte die Trennungsflächen der Schichten im Inneren der Erde kennen. Der Mond lieferte die Bestimmung der Dichte der äußeren Steinschicht in guter Übereinstimmung mit irdischen Beobachtungen über deren Materialbeschaffenheit. Die Abplattung der Erde erlaubte dann bei Berücksichtigung von Präzession und Nutation die Dichten von Mittelschicht und Kern zu berechnen. Für die menschliche Willkür blieb nichts weiter offen als die Annahme, in den drei Teilen der Erde variiere die Dichte nicht erheblich. Andererseits lieferte die physikalische Chemie zusammen mit der Untersuchung der Beschaffenheit der Erdrinde ein Urteil über die materielle Beschaffenheit der drei Teile des Erdkörpers. Und dieses Urteil stimmt völlig überein mit dem, was jene so gänzlich andersartigen Erdmessungen uns lehren! Wir sehen wohl eines der schönsten Resultate der Geophysik vor Augen. —

Die Seismik und Physik gestatten noch einige wichtige Schritte weiterzugehen, wenn auch der Boden unter unseren Füßen nun unsicher wird.

Es sei $1/K$ die Zusammendrückbarkeit, dann soll K der „Volumwiderstand“ genannt werden:

$$K = \text{Volumwiderstand} = 1/\text{Zusammendrückbarkeit}.$$

Wählen wir hier und weiterhin die Atmosphäre als Druckeinheit, so bezeichnet $1/K$ den Bruchteil, um welchen das Volumen geringer wird, wenn der Druck um eine Atmosphäre steigt.

Für Steinmantel und Mittelschicht lehrt die Seismik die Laufzeit der longitudinalen und der transversalen Wellen kennen, während unsere Rechnung die Dichte angibt; so kann der Volumwiderstand berechnet werden. Es folgt für die Grenze von Steinmantel und Mittelschicht (Tiefe = 1200 km):

Im Steinmantel $K = 2{,}9 \, . \, 10^6$, in der Mittelschicht $K = 5{,}4 \, . \, 10^6$.

Für die Grenze von Mittelschicht und Kern (Tiefe = 2900 km) folgt

$$\text{für die Mittelschicht } K = 6{,}3 \, . \, 10^6.$$

Zum Vergleich möge bemerkt werden, daß unter den Umständen unserer täglichen Umgebung für Stahl $K = 1{,}6 . 10^6$ ist. Bei den in Betracht kommenden Mineralien finden sich Werte, welche $^1/_2$ oder $^1/_3$ dieser Zahl sind. Der Volumwiderstand im Innern der Erde ist also weit größer als der in der Materie unserer Umgebung; das erscheint als eine natürliche Folge des hohen Druckes und der hohen Temperatur im Inneren der Erde. —

Wenden wir nun die Aufmerksamkeit auf den Erdkern, dann ergibt sich eine Überraschung. Die seismische Schattenbildung an der Kernoberfläche beruht darauf, daß hier die Laufgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen einen starken Sprung erleidet: die Laufgeschwindigkeit ist im Kern viel niedriger als in der Mittelschicht. Während die Laufgeschwindigkeit in der Mittelschicht etwa 13 km/sec beträgt, ist sie im Kern (nach Rechnungen von B. Gutenberg und auch von mir) auf etwa $8^1/_2$ km/sec anzunehmen. Bisher gelang es nicht, transversale Wellen zu beobachten, welche durch den Kern gegangen sind. Wollten wir annehmen, daß die Laufgeschwindigkeit der transversalen Wellen sich zur Laufgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Kern ebenso verhält wie in der Mittelschicht und im Steinmantel, so würde sich für den Kern in seiner oberen Grenze ergeben

$$K = 3{,}9 . 10^6.$$

Hiernach wäre der Volumwiderstand im Kern nur $^2/_3$ des Volumwiderstandes in der Mittelschicht. Dies erscheint als ein schwerer Widerspruch, wenn man bedenkt, daß im Kern Eisen und Nickel weit mehr vorherrschen als in der Mittelschicht. Für die Theorie sind wir zu einem wichtigen Ergebnis gelangt, denn an Widersprüche knüpfte sich ja so oft schon der Fortschritt der Wissenschaft. Welches ist die Auflösung in unserem Falle? Es scheint mir kaum möglich, sie anderswo zu suchen als in der Annahme, daß der Kern sich nicht wie ein fester Körper sondern infolge der Wärmebewegung wie eine Flüssigkeit verhält, oder daß doch wenigstens die Riegheit des Kernes anormal gering ist.

Eine solche Annahme ist nicht neu. Aus dem Umstand, daß es nicht gelungen ist, die transversalen Wellen zu erkennen, welche durch den Kern gegangen sind, wurde von C. G. Knott (1919) die Ansicht ausgesprochen, der Kern sei flüssig. Zwar hat B. Gutenberg in einer ausführlichen Diskussion 1923 gezeigt, daß der Schluß nicht sicher ist, da vielleicht nur Beobachtungsschwierigkeiten die Nichtbeobachtung der transversalen Wellen

bisher verschuldet haben. Aber es scheint mir nun angesichts der obigen Erwägungen doch geboten, die Hypothese eines flüssigen oder anormal gering riegen Kernes anzunehmen. Für den Volumwiderstand des Kernes an seiner oberen Grenze folgt dann:

$$K = 6{,}8 \, . \, 10^6.$$

Dieser Wert liegt über dem für die Mittelschicht, sodaß der Widerspruch beseitigt scheint. — 1916 bemerkte W. Schweydar, daß die Erde im Ganzen bei den Polschwankungen eine erheblich geringere Riegheit zeigt, als mit den Erdbeobachtungen verträglich scheint, wenn man die üblichen Annahmen über die transversalen Wellen macht. Ich bin geneigt, hierin einen neuen Fingerzeig für eine unerwartet geringe Riegheit des Kernes zu sehen.

Wie aber soll erklärt werden, daß der Erdkern an seiner Oberfläche flüssig oder sehr wenig riege ist, während doch die Steinschicht unmittelbar darüber, also unter gleichen Temperatur- und Druck-Verhältnissen normale Riegheit zeigt? Mir scheint, daß hier keine verhängnisvolle Schwierigkeit vorliegt. Bedenkt man nämlich, daß im Inneren des Kernes die Atome im wesentlichen einander gleich sind, weil die Eisenatome weitaus vorherrschen, so scheint es wohl erlaubt, hier infolge der Wärmebewegung eine freie Verschiebbarkeit anzunehmen, während im Steinmantel, wo verschiedenartige Atome durcheinander gemischt sind, eine solche Verschiebbarkeit durch die Wärmebewegung nicht erreicht wird. Es könnte sein, daß es sich hier um ein Phänomen von noch höherem physikalischen Interesse handelt. — Noch mag bemerkt werden, daß vielleicht nicht der ganze Kern anormal gering riege ist, sondern möglicher Weise nur ein oberer Teil, während in der Tiefe der höhere Druck die Atome gegenseitig festigt.

Als fundamentale Hypothese für die Theorie galt, daß innerhalb der einzelnen Erdteile, des Steinmantels, der Mittelschicht und des Metallkernes die Dichte trotz der Druckunterschiede nicht merklich variiere. Da durch die Beobachtungen die Zusammendrückbarkeit bekannt wird, kann die Hypothese einigermaßen geprüft werden. Es ergibt sich, daß die Variation der Dichte im Steinmantel, abgesehen von der Oberflächenhaut, auf der wir leben, nur wenige Zehntel der Dichteeinheit betragen wird. In der Mittelschicht scheint eine Variation um etwa eine halbe Einheit möglich. Im Kern könnte die Variation eine Einheit erreichen.

Göttingen, im Januar 1925.
